

Entraînement d'air humide saturé contenant de l'eau liquide dans une masse d'air humide saturé contenant de l'eau liquide

Par L. DUFOUR, Institut Royal Météorologique, Uccle, Belgique

(Manuscript received January 19, 1956)

Abstract.

In the present work, on the basis of the first principle of thermodynamics, we establish the law of variation of temperature with pressure in a saturated mass sphere containing liquid water into which saturated air containing also liquid water penetrates.

Admitting that the considered mass of air and the air which is introduced into it form a closed system, the problem consists in the study of the adiabatic transformations of a polytherm closed system.

Owing to a few hypothesis (cf (24) and (28)), we obtain formula (35) which is a particular case of the formula (36) to which leads the study of the entrainment of non saturated air into a cumulus.

Taking the example of a bubble which moves in the middle of a cumulus, we show that the rate of variation of temperature with pressure is, to the first approximation, that of the standard adiabatic.

Pour expliquer la formation des cumulus, SCORER et LUDLAM (1953) ont proposé une théorie dans laquelle ils supposent entre autres que des masses d'air, qu'ils appellent des bulles, se déplacent vers le haut dans le nuage en se mélangeant à l'air ambiant.

L'étude thermodynamique de ce problème peut être envisagée de la façon suivante. Supposons:

- 1°) que la bulle est composée d'air humide saturé contenant de l'eau liquide et qu'elle constitue un système ouvert;
- 2°) que l'air ambiant, entraîné dans la bulle, est constitué d'air humide saturé contenant de l'eau liquide et qu'il constitue également un système ouvert;
- 3°) que l'ensemble formé par ces deux systèmes ouverts constitue un système fermé dans lequel se produisent des échanges d'air sec, de vapeur d'eau et d'eau liquide;
- 4°) que les transformations de ce système fermé sont adiabatiques.

D'après ces hypothèses, l'étude thermodynamique de l'entraînement de l'air dans une bulle se ramène à celle des transformations adiabatiques d'un système fermé polytherme formé d'un système ouvert prime (bulle) déterminé par la température T' , la pression p et les masses m'_a , m'_v , m'_e de l'air sec, de la vapeur d'eau et de l'eau liquide et d'un système ouvert seconde (air entraîné dans la bulle) déterminé par la température T'' , la pression p et les masses m''_a , m''_v , m''_e d'air sec, de vapeur d'eau et d'eau liquide.

Posons

$$m_a = m'_a + m''_a, \quad m_v = m'_v + m''_v, \quad m_e = m'_e + m''_e \quad (1)$$

L'air sec étant un constituant inerte et le système constitué par l'ensemble des deux systèmes prime et seconde étant fermé, on a

$$\left. \begin{aligned} dm_a &= dm'_a + dm''_a = 0, \\ dm_v + dm_e &= dm'_v + dm''_v + dm'_e + dm''_e = 0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

d'où il résulte que des six variables massiques déterminant le système polytherme, quatre seulement sont indépendantes.

Désignons par h'_a , h'_v , h'_e et h''_a , h''_v , h''_e les enthalpies spécifiques des constituants dans les phases prime et seconde; on a (cf. par exemple, VAN MIEGHEM et DUFOUR, 1948, §22)

$$\left\{ \begin{array}{l} h'_a = h_a^\circ + c_{pa}(T' - T_0), \\ h'_v = h_v^\circ + c_{pv}(T' - T_0), \\ h'_e = h_e^\circ + c_{pe}(T' - T_0), \\ h''_a = h_a^\circ + c_{pa}(T'' - T_0), \\ h''_v = h_v^\circ + c_{pv}(T'' - T_0), \\ h''_e = h_e^\circ + c_{pe}(T'' - T_0), \end{array} \right\} \quad (3)$$

où h_a° , h_v° , h_e° sont les enthalpies spécifiques à la température T_0 et c_{pa} , c_{pv} , c_{pe} sont les chaleurs spécifiques à pression constante de l'air sec, de la vapeur d'eau et de l'eau liquide.

Rappelons que les enthalpies des deux systèmes prime et seconde sont données par les relations

$$\left\{ \begin{array}{l} H' = m'_a h'_a + m'_v h'_v + m'_e h'_e, \\ H'' = m''_a h''_a + m''_v h''_v + m''_e h''_e. \end{array} \right\} \quad (4)$$

Rappelons également la forme que prend l'expression de la chaleur de vaporisation de l'eau; on a, à la température T' et à la température T''

$$L'_v = h'_v - h'_e, \quad L''_v = h''_v - h''_e \quad (5)$$

d'où il résulte, compte tenu de (3), que

$$L''_v = L'_v - (c_{pv} - c_{pa})(T' - T''). \quad (6)$$

L'équation différentielle des transformations adiabatiques du système fermé s'écrit

$$d(H' + H'') - (V' + V'')dp = 0 \quad (7)$$

où V' et V'' sont les volumes des systèmes prime et seconde.

Compte tenu de (2), (3), (4) et (5), l'équation (7) prend la forme suivante

$$\begin{aligned} & (m'_a c_{pa} + m'_v c_{pv} + m'_e c_{pe}) dT' + \\ & + (m''_a c_{pa} + m''_v c_{pv} + m''_e c_{pe}) dT'' + \\ & + L'_v (dm'_v + dm''_v) + (T'' - T') \times \\ & \times (c_{pa} dm''_a + c_{pv} dm''_v + c_{pe} dm''_e) - (V' + V'') dp = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Négligeons le volume de la phase liquide par rapport à celui de la phase gazeuse dans les systèmes prime et seconde. On a alors, en vertu de l'équation caractéristique des gaz parfaits,

$$V' \cong \frac{m'_a R_a T'}{p - p'_v} \quad \text{et} \quad V'' \cong \frac{m''_a R_a T''}{p - p''_v} \quad (9)$$

où R_a est la constante spécifique des gaz parfaits pour l'air sec et p'_v , p''_v les pressions partielles de la vapeur d'eau dans les deux systèmes.

On sait d'autre part que les rapports de mélange dans les systèmes prime et seconde sont donnés par les relations

$$r'_v = \frac{m'_v}{m'_a} = \frac{\varepsilon p'_v}{p - p'_v}, \quad r''_v = \frac{m''_v}{m''_a} = \frac{\varepsilon p''_v}{p - p''_v}, \quad (10)$$

où ε est la gravité spécifique de la vapeur d'eau. Posons

$$r'_e = \frac{m'_e}{m'_a}, \quad r''_e = \frac{m''_e}{m''_a}. \quad (11)$$

En différenciant les relations (10) et (11), on a

$$\left\{ \begin{array}{l} dm'_v = m'_a dr'_v + r'_v dm'_a, \\ dm''_v = m''_a dr''_v + r''_v dm''_a, \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} dm'_e = m'_a dr'_e + r'_e dm'_a, \\ dm''_e = m''_a dr''_e + r''_e dm''_a. \end{array} \right. \quad (12)$$

Eu égard à (2) et (11), l'équation (8) s'écrit

$$\begin{aligned} & (m'_a c_{pa} + m'_v c_{pv} + m'_e c_{pe}) dT' + \\ & + (m''_a c_{pa} + m''_v c_{pv} + m''_e c_{pe}) dT'' + \\ & [(c_{pa} + r'_v c_{pv} + r'_e c_{pe})(T'' - T') + L'_v(r'_v - r'_e)] \times \\ & \times dm''_a + m'_a L'_v dr'_v + m''_a [L'_v + c_{pv}(T'' - T')] dr''_v + \\ & + m''_a c_{pe}(T'' - T') dr''_e - R_a \times \\ & \times \left(\frac{m'_a T'}{p - p'_v} + \frac{m''_a T''}{p - p''_v} \right) dp = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Remarquons que cette équation est une relation différentielle linéaire à six fonctions inconnues d'une variable indépendante p .

Exprimons maintenant que les systèmes prime et seconde restent saturés au cours de la transformation adiabatique en écrivant que la loi du déplacement de l'équilibre est satisfaite dans les deux systèmes. Cette loi s'écrit comme suit dans le système prime

$$\frac{\varepsilon L'_v}{(T'')^2} dT' = R_a \frac{dp'_v}{p'_v}. \quad (14)$$

On a d'autre part, en différentiant la première relation (10),

$$dr'_v = \frac{(\varepsilon + r'_v) dp'_v}{p - p'_v} - \frac{r'_v dp}{p - p'_v} \quad (15)$$

ou encore, compte tenu de (14),

$$dr'_v = \frac{r'_v(\varepsilon + r'_v)L'_v}{R_a(T'')^2} dT' - \frac{r'_v dp}{p - p'_v}. \quad (16)$$

On montrerait de même que, pour le système seconde, on a

$$dr''_v = \frac{r''_v(\varepsilon + r''_v)L''_v}{R_a(T'')^2} dT'' - \frac{r''_v dp}{p - p''_v}. \quad (17)$$

En remplaçant dr'_v et dr''_v par leurs valeurs tirées de (16) et (17) dans (13), cette équation prend la forme suivante

$$\frac{dT'}{dp} = \frac{X}{Y} \quad (18)$$

où

$$\begin{aligned} X = & \frac{m'_a R_a T'}{p - p'_v} \left(1 + \frac{r'_v L'_v}{R_a T'} \right) + \frac{m''_a R_a T''}{p - p''_v} + \\ & + \frac{m''_a [L'_v - c_{pv}(T' - T'')] r''_v}{(p - p''_v)} + \\ & + [(c_{pa} + r'_v c_{pv} + r'_e c_{pe})(T' - T'') + L'_v(r'_v - r''_v)] \times \\ & \times \frac{dm''_a}{dp} + m''_a c_{pe}(T' - T'') \frac{dr''_e}{dp} - \\ & - \left[(m''_a c_{pa} + m''_v c_{pv} + m''_e c_{pe}) + \right. \\ & \left. [m''_a L'_v - c_{pv}(T' - T'')] \frac{r''_v(\varepsilon + r''_v)L''_v}{R_a(T'')^2} \right] \frac{dT''}{dp} \end{aligned} \quad (19)$$

et

$$Y = m'_a c_{pa} + m'_v c_{pv} + m'_e c_{pe} + \frac{m'_a r'_v(\varepsilon + r'_v)(L'_v)^2}{R_a(T')^2}. \quad (20)$$

Remarquons que la relation différentielle (18) ne contient plus que quatre fonctions inconnues (m''_a , r''_e , T' , T'') d'une variable indépendante p , deux fonctions ayant été éliminées en exprimant que l'air est saturé dans les systèmes prime et seconde.

Tellus VIII (1956), 3

Introduisons l'opérateur

$$d = d_i + d_e \quad (21)$$

où le signe différentiel d_i se rapporte aux transformations massiques qui se produisent à l'intérieur d'un système ouvert et le signe différentiel d_e aux échanges de masse du système avec l'extérieur.

On a

$$d_i m'_a = 0, \quad d_i m'_v + d_i m'_e = 0, \quad (22)$$

et

$$d_i m''_a = 0, \quad d_i m''_v + d_i m''_e = 0. \quad (23)$$

L'expression (18) se simplifie considérablement si l'on fait les hypothèses suivantes.

La première hypothèse est que l'entraînement de l'air sec, de la vapeur d'eau et de l'eau liquide dans la bulle (système prime) est proportionnel aux masses de ces constituants dans l'air ambiant, c'est-à-dire que

$$\frac{d_i m'_a}{m'_a} = \frac{d_i m'_v}{m'_v} = \frac{d_i m'_e}{m'_e}. \quad (24)$$

Différentions logarithmiquement les secondes relations (10) et (11), nous obtenons

$$\frac{d_e r''_v}{r''_v} = \frac{d_e m''_v}{m''_v} - \frac{d_e m''_a}{m''_a} \quad (25)$$

et

$$\frac{d_e r''_e}{r''_e} = \frac{d_e m''_e}{m''_e} - \frac{d_e m''_a}{m''_a}, \quad (26)$$

d'où, (24),

$$d_e r''_v = 0, \quad d_e r''_e = 0. \quad (27)$$

La seconde hypothèse consiste à supposer que les transformations du système ouvert seconde sont pseudoadiabatiques, c'est-à-dire que (cf. VAN MIEGHEM et DUFOUR, 1948, § 41)

$$dH'' - V'' dp - h''_a d_e m''_a - h''_v d_e m''_v - h''_e d_e m''_e = 0, \quad (28)$$

ou encore, compte tenu de (3), (4), (5) et (21), que

$$\left. \begin{aligned} & (m''_a c_{pa} + m''_v c_{pv} + m''_e c_{pe}) dT'' - \\ & - V'' dp + L'_v d_i m''_v = 0. \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

Mais, eu égard à (10), (11), (21), (23) et (27),

$$d_i m_v'' = m_a'' d_i r_v'' = m_a'' dr_v'' \quad (30)$$

et

$$d_i m_e'' = m_a'' d_i r_e'' = m_a'' dr_e'' \quad (31)$$

En ajoutant les équations (30) et (31) membre à membre, on trouve, compte tenu de (23), que

$$dr_v'' = -dr_e'' \quad (32)$$

Eu égard à (1), (17) et (30), l'équation (29) prend alors la forme suivante

$$\left[m_a'' c_{pa} + m_v'' c_{pv} + m_e'' c_{pe} + m_a'' \frac{r_v'' (\varepsilon + r_v'') (L_v'')^2}{R_a (T'')^2} \right] \times \frac{dT''}{dp} = \frac{m_a'' R_a T''}{p - p_v''} + \frac{m_a'' L_v'' r_v''}{p - p_v''} \quad (33)$$

Revenons à l'équation (18) qui s'écrit, compte tenu de (32) et (33),

$$(34) \quad \frac{dT'}{dp} = \frac{m_a' R_a T' \left(1 + \frac{r_v' L_v'}{R_a T'} \right) + [(c_{pa} + r_v' c_{pv} + r_e' c_{pe}) (T' - T'') + L_v' (r_v' - r_v'')] \frac{dm_a'}{dp}}{m_a' c_{pa} + m_v' c_{pv} + m_e' c_{pe} + \frac{m_a' r_v' (\varepsilon + r_v') (L_v')^2}{R_a (T')^2}}$$

En première approximation, p_v' est négligeable devant p et il en est de même de $r_v' c_{pv} + r_e' c_{pe}$ devant c_{pa} , de $m_v' c_{pv} + m_e' c_{pe}$ devant $m_a' c_{pa}$ et de r_v' devant ε . En tenant compte de ces approximations, l'équation (34) prend la forme suivante

$$(35) \quad \frac{dT'}{dp} \cong \frac{\frac{R_a T'}{c_{pa} p} \left(1 + \frac{r_v' L_v'}{R_a T'} \right) + \left[(T' - T'') + \frac{L_v'}{c_{pa}} (r_v' - r_v'') \right] \frac{1}{m_a'} \frac{dm_a'}{dp}}{1 + \frac{r_v' (L_v')^2}{c_{pa} R_a (T')^2}}$$

Cette équation approchée a la même forme que l'équation approchée à laquelle on arrive en étudiant l'entraînement d'air humide non saturé dans de l'air humide saturé (DUFOUR 1956). Cette équation s'écrit, avec les notations utilisées ci-dessus

$$(36) \quad \frac{dT'}{dp} \cong \frac{\frac{R_a T'}{c_{pa} p} \left(1 + \frac{r_v' L_v'}{R_a T'} \right) + \left[(T' - T'') + \frac{L_v'}{c_{pa}} \left(r_v' - \frac{U''}{100} r_v'' \right) \right] \frac{1}{m_a'} \frac{dm_a'}{dp}}{1 + \frac{r_v' (L_v')^2}{c_{pa} R_a (T')^2}}$$

où U'' est l'humidité relative du système seconde. On voit ainsi que (35) est un cas particulier de (36), celui où $U'' = 100\%$ et où l'air entraîné est donc saturé.

Lorsque $dm_a'/dp = 0$, c'est-à-dire lorsqu'il n'y a pas d'entraînement, l'équation (35) prend la forme classique du taux de variation individuelle de la température par unité de pression lors d'une transformation adiabatique de saturation, à savoir

$$\frac{dT'}{dp} = \frac{\frac{R_a T'}{c_{pa} p} \left(1 + \frac{r_v' L_v'}{R_a T'} \right)}{1 + \frac{\varepsilon r_v' (L_v')^2}{c_{pa} R_a (T')^2}} \quad (37)$$

Posons

$$\frac{1}{m_a'} \frac{dm_a'}{dp} = k \quad (38)$$

où k est ce que nous appellerons le coefficient d'entraînement dont on ne connaît malheureusement pas la valeur.

Pour se faire une idée de cette valeur, partons d'un fait d'observation, à savoir que les cumulus se dissipent continuellement dans

leur partie latérale. Ce phénomène est expliqué en admettant que de l'air ambiant non saturé est entraîné dans l'air saturé du nuage, ce qui provoque l'évaporation des gouttelettes nuageuses. Dans le cas considéré, l'entraînement est donc tel que dT'/dp est, en première

approximation, égal au taux de variation individuelle de la température lors d'une transformation adiabatique d'air sec. En introduisant ce taux dans la formule (36), il est alors possible de déterminer la valeur de k .

Considérons le cas où, à la pression de 900 mb, de l'air humide non saturé dont la température $T'' = 282^\circ\text{K}$ et l'humidité relative $U'' = 50\%$ est entraîné dans de l'air humide saturé dont la température $T' = 283^\circ\text{K}$.

Calculons, à l'aide de la formule (37), où nous avons posé $r_v = 0$, le taux de variation individuelle de la température lors d'une transformation adiabatique d'air sec. On trouve¹

$$\left(\frac{dT'}{dp}\right)_1 = 8,98 \times 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C, mb}^{-1}. \quad (39)$$

En portant la valeur (39) dans l'équation (36), on a dans le cas considéré,

$$k = 8,56 \times 10^{-3} \text{ mb}^{-1} \quad (40)$$

ce qui correspond à peu près au doublement de la masse d'air par entraînement pour une variation de pression de 100 mb.

En admettant que le coefficient d'entraînement soit le même au cœur du nuage que sur les bords, on trouve, compte tenu de (40) et de (35), que

¹ Dans ce calcul et dans le suivant nous avons utilisé ces valeurs données dans la Publication n° 79 de l'Organisation météorologique mondiale.

$$\left(\frac{dT'}{dp}\right)_2 = 5,48 \times 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C, mb}^{-1} \quad (41)$$

lorsque l'air entraîné est saturé.

S'il n'y avait pas d'entraînement, on aurait, d'après (37), dans le cas considéré

$$\left(\frac{dT'}{dp}\right)_3 = 4,64 \times 10^{-2} \text{ }^\circ\text{C, mb}^{-1}. \quad (42)$$

La comparaison des valeurs (41) et (42) montre que l'entraînement d'air humide saturé ambiant affecte peu le taux de variation de la température en fonction de la pression dans une masse d'air humide saturé qui se déplace au cœur d'un cumulus.

En première approximation, on peut donc admettre, comme on l'a fait jusqu'ici sans le prouver, que le taux de variation de la température en fonction de la pression dans les masses d'air qui se déplacent au cœur d'un cumulus est celui qui résulte des transformations adiabatiques de l'air humide saturé.

C'est grâce au Fonds National de la Recherche Scientifique que j'ai pu effectuer cette recherche lors d'un séjour à l'Institut international de météorologie à Stockholm. Je remercie vivement le Professeur C. G. Rossby et mes collègues étrangers de l'accueil qu'ils m'ont réservé et le Fonds national de la recherche scientifique de l'appui qu'il a bien voulu m'accorder.

BIBLIOGRAPHIE

- DUFOUR, L., 1956: Thermodynamical study of the entrainment of air into a cumulus. *Tellus*, **8**, p. 202.
 SCORER, R. S. et LUDLAM, F. H., 1953: Bubble theory of penetrative convection. *Quart. J. R. Meteor. Soc.*, **79**, pp. 94—103.
 VAN MIEGHEM, J., et DUFOUR, L., 1948: Thermodynamique de l'atmosphère. *Inst. roy. mét. Belgique, Mémoires*, vol. XXX.