

Nivellement hydrographique entre six stations danoises

Par AXEL JESSEN, Institut Géodésique, Copenhague

(Manuscript received 21 June 1954)

Abstract.

The annual means of sea-level are considered as consisting of two independent quantities: the height of the zero point in question and the height of the water-surface. An attempt is made to separate these two quantities. The result is a set of diagrams showing the relative secular motion of the zero points and the sea-level.

Les enregistrements marégraphiques dans deux stations 1 et 2 donnent la différence correcte des hauteurs des zéros quand les niveaux observés ν_1 et ν_2 appartiennent à la même surface de niveau. On est cependant loin d'avoir les moyens de corriger ν_1 et ν_2 tel que cette condition soit remplie, en dépit de nombreuses recherches. La différence $\nu_1 - \nu_2$ n'est donc qu'une approximation à la différence des niveaux des deux stations. D'autre part il semble possible, acceptant l'hypothèse que les ν_1 et ν_2 soient affectées d'erreurs assez constantes, de suivre les variations de $\nu_1 - \nu_2$ en fonction du temps, et c'est un essai dans cette direction qui sera fait.

Une complication intervient cependant, puisque les nombres ν_i sont corrélés. Il y a entre deux observations ν_1 et ν_2 une équation $\nu_1 - t\nu_2 = q$, ou t dans beaucoup de cas diffère de 1. C'est-à-dire que la différence des niveaux est une fonction du niveau de la mer, comme l'on voit en écrivant $\nu_1 - \nu_2 = q - (1-t)\nu_2$. La fig. 1 montre ce phénomène. Les moyennes annuelles de ν_1 à Aarhus sont portées en ordonnées aux abscisses correspondantes ν_2 à Hornbæk. La tendance du groupement autour de la ligne droite $\nu_1 - 0,7 \nu_2 = q$ est apparente. Cette corrélation se présente, soit que l'on se base sur des moyennes mensuelles ou annuelles ou 5-annuelles. La condition nécessaire pour qu'une théorie des corrections des ν_i soit acceptable est qu'elle rende t égal à 1.

Le présent mémoire s'occupe des stations

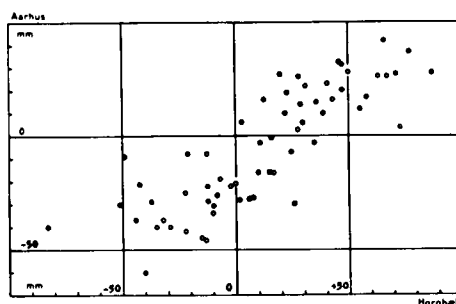


Fig. 1. Corrélation des niveaux de la mer observés à Aarhus et à Hornbæk.

danoises 1 Aarhus, 2 Hornbæk, 3 København, 4 Gedser, 5 Korsør, 6 Slipshavn. Le tableau suivant donne les moyennes annuelles du niveau de la mer en unités de mm; les tableaux correspondantes dans publ. scient. (Association d'océanographie Physique, 1940) sont augmentés et quelques valeurs changées un peu. Les nombres représentent les hauteurs de la mer au dessus des zéros locaux respectifs.

Le coefficient t est calculé de la manière suivante. On représente l'assemblage des points dans fig. 1 par la droite

$$(a) \quad L(xy) = x \sin A - y \cos A - p = 0$$

Un point $(x_1 y_1)$ a la distance $L(x_1 y_1)$ de cette ligne. On exige que la condition $\sum_{x,y} (L(xy))^2 = \min.$ soit remplie, ce qui rend

Année	Aarhus	Horn-bæk	Köben-havn	Gedser	Korsör	Slips-havn	Année	Aarhus	Horn-bæk	Köben-havn	Gedser	Korsör	Slips-havn
1892	—46	—13	0	—15	4	—19	1923	12	55	60	63	57	39
3	—30	26	37	20	38	20	4	—16	17	14	26	25	4
4	—28	6	3	—7	18	—17	5	26	67	82	73	67	61
5	—26	—8	18	19	25	—10	6	14	29	44	56	48	51
6	—34	—10	4	—7	4	—36	7	20	47	61	88	70	56
7	—45	—15	—6	—22	0	—32	8	10	22	34	45	50	37
8	10	39	62	48	59	23	9	—16	10	25	31	41	18
9	28	87	104	125	102	60	1930	—8	—13	7	27	27	10
1900	—22	—12	—2	20	10	—15	1	19	23	42	40	45	40
1	—60	—40	—21	—19	—8	—47	2	23	41	53	70	54	37
2	—22	—2	3	3	14	—25	3	—8	—21	0	23	30	6
3	37	77	77	91	86	46	4	—16	15	32	9	36	4
4	—28	2	—5	—13	13	—21	5	15	36	50	49	54	26
5	—7	25	25	45	43	10	6	6	3	24	39	44	16
6	3	28	36	28	41	9	7	—9	—49	—21	44	24	—3
7	—27	8	14	16	25	—15	8	26	63	76	81	88	48
8	—40	—35	—25	—22	—12	—43	9	—37	—44	—24	0	9	—10
9	—21	0	18	4	28	—8	1940	—29	—37	—9	23	28	1
1910	—3	11	17	15	35	—1	1	—40	—83	—27	4	—4	—16
1	6	30	46	41	48	26	2	—37	—32	2	39	24	0
2	16	43	54	20	39	24	3	17	58	80	81	87	52
3	27	71	83	67	78	58	4	—1	16	46	77	66	34
4	31	47	64	46	71	51	5	32	46	78	108	101	74
5	—25	—22	2	20	16	4	6	27	20	45	84	86	57
6	14	29	49	53	54	30	7	—30	—51	—35	27	24	—3
7	—29	—12	8	21	12	—8	8	28	50	67	98	105	67
8	—31	—10	4	21	14	—2	9	42	66	87	100	115	80
9	—40	—29	—10	13	8	—19	1950	26	28	40	77	82	51
1920	—19	—7	—2	—3	15	—11	1	—21	—42	—38	—6	19	—6
1	4	73	76	41	57	39	2	16	13	51	108	92	64
2	—3	35	45	82	52	28	3	22	31	53	80	90	59

possible le calcul de A et p par les équations

$$\frac{\partial \Sigma}{\partial A} = 0, \quad \frac{\partial \Sigma}{\partial p} = 0.$$

Soit N le nombre des points, $\tan A = t$, alors on aura pour t l'équation

$$(b) \quad t^2 + \frac{N\Sigma x^2 - N\Sigma y^2 - (\Sigma x)^2 + (\Sigma y)^2}{N\Sigma xy - \Sigma x \Sigma y} t - 1 = 0$$

Pour éviter que le résultat soit influencé trop fort par les variations séculaires du niveau des stations, on a calculé t comme moyenne de trois valeurs correspondant chacune à $N = 20$ environ.

Les deux racines de (b) représentent les directions des axes d'une ellipse d'erreur de l'assemblage des points (STUMPF, 1940). Soient t_a la racine positive, t_b la racine négative, et

$$L_a(xy) = (1 + t_a^2)^{-\frac{1}{2}}(t_a x - y) = 0$$

$$L_b(xy) = (1 + t_b^2)^{-\frac{1}{2}}(t_b x - y) = 0$$

les droites correspondantes pour $p = 0$. Alors, substituant v_1 et v_2 au lieu de x et y , $L_a(v_1 v_2)$ caractérise la différence des niveaux des deux stations, $L_b(v_1 v_2)$ caractérise la somme des hauteurs de l'eau. L_a et L_b sont non-corrélés. Dans le cas idéal on a $t_a = 1$ et $t_b = -1$, d'où $L_a = (v_1 - v_2)/\sqrt{2}$, $L_b = -(v_1 + v_2)/\sqrt{2}$. C'est donc une idée naturelle d'introduire des niveaux réduites v'_1 et v'_2 et de calculer des différences de niveau réduites et des hauteurs de l'eau par les équations

(c)

$$h_{12} = L_a \sqrt{2} = \sqrt{2}(1 + t_a^2)^{-\frac{1}{2}}(t_a v_1 - v_2) = v'_1 - v'_2$$

$$w_{12} = -L_b \sqrt{2} = -\sqrt{2}(1 + t_b^2)^{-\frac{1}{2}}(t_b v_1 - v_2) = v'_1 + v'_2$$

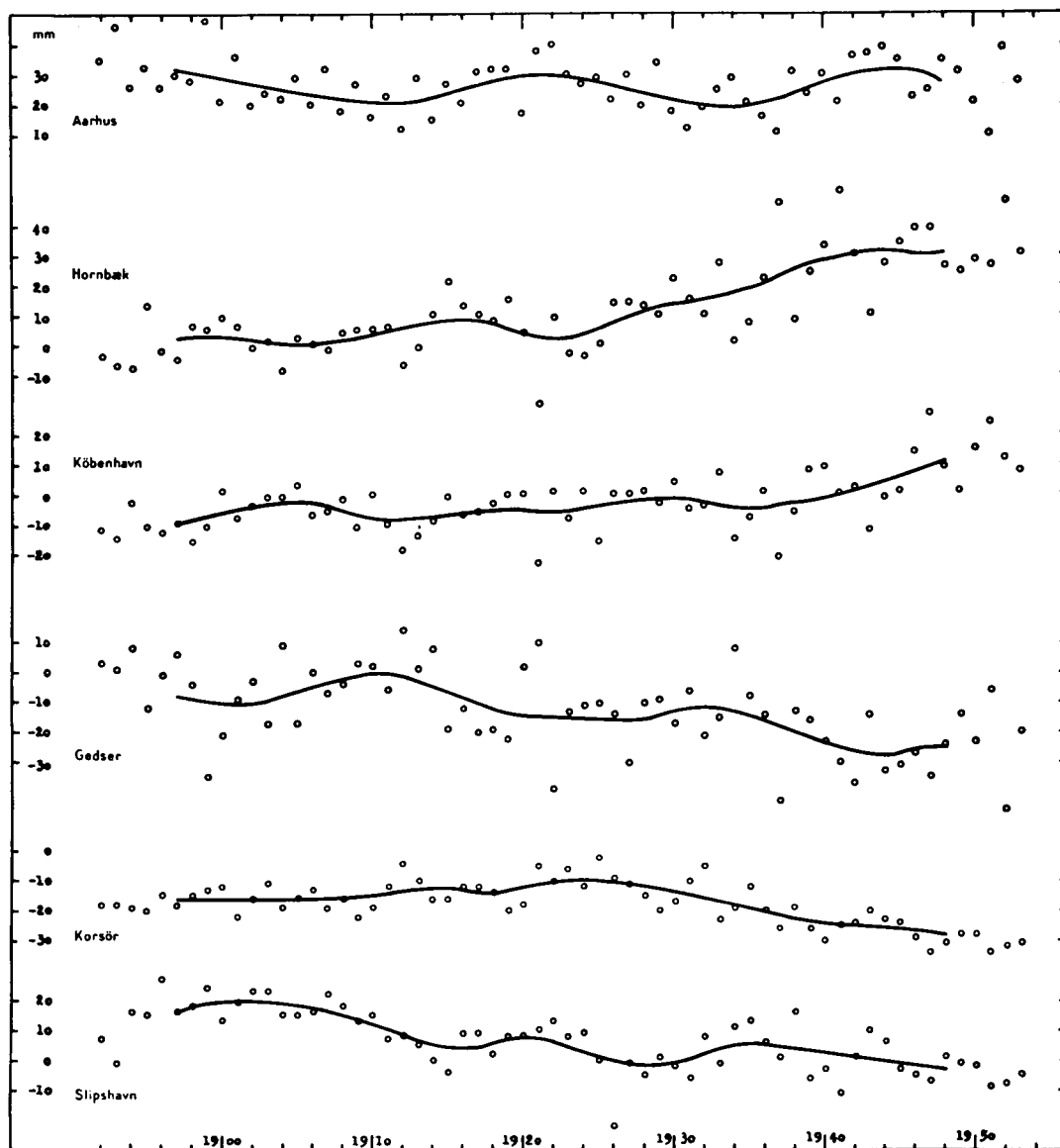


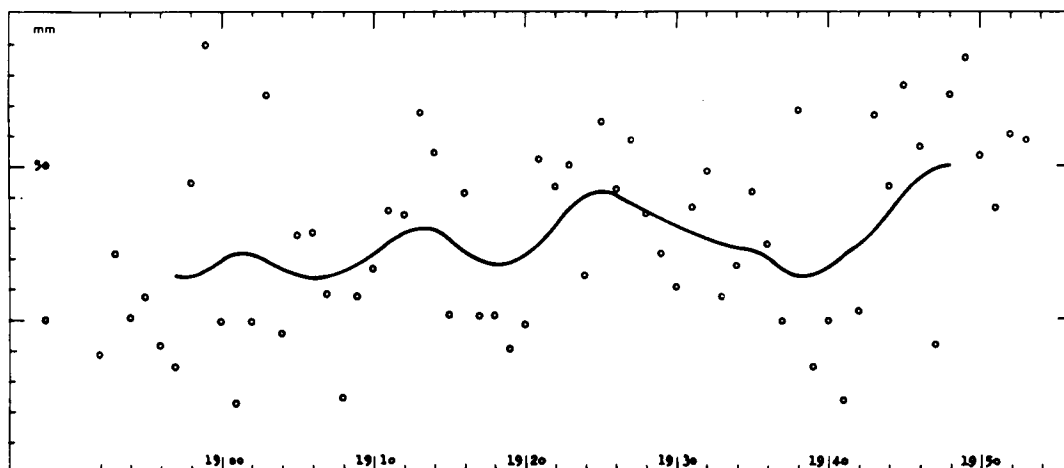
Fig. 2. Variations de la hauteur des zéros locaux.

Par ce procédé on obtient pour les 6 stations mentionnés les équations

$$\begin{aligned} h_{12} &= 0,78 (1,5 \nu_1 - \nu_2), \\ h_{23} &= 1,00 (1,0 \nu_2 - \nu_3), \\ h_{34} &= 1,05 (0,9 \nu_3 - \nu_4), \\ h_{45} &= 1,05 (0,9 \nu_4 - \nu_5), \\ h_{51} &= 1,10 (0,8 \nu_5 - \nu_1), \\ h_{65} &= 0,95 (1,1 \nu_6 - \nu_4). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} w_{12} &= 1,16 (0,7 \nu_1 + \nu_2) \\ w_{23} &= 1,00 (1,0 \nu_2 + \nu_3) \\ w_{34} &= 0,95 (1,1 \nu_3 + \nu_4) \\ w_{45} &= 0,95 (1,1 \nu_4 + \nu_5) \\ w_{51} &= 0,90 (1,2 \nu_5 + \nu_1) \\ w_{65} &= 1,05 (0,9 \nu_6 + \nu_5) \end{aligned}$$

Une pair d'équations appartenant ensemble fournit les valeurs correspondantes de ν'_i . On

Fig. 3. Variation du niveau de la mer v' .

prend la moyenne de plusieurs v'_i ainsi calculées pour le même indice i pour valeur définitive de v'_i . Finalement on forme la moyenne pesée v' de tous les v'_i ; v' représente le niveau réduit de la mer au dessus d'un zéro fictif, dont la hauteur est supposée plus constante que les hauteurs des zéros locaux. La hauteur d'un zéro local au dessus du zéro fictif est $v' - v'_i$.

Les fig. 2 et 3 donnent la représentation graphique de $v' - v'_i$ et v' . L'axe central des diagrammes est supposé d'être la meilleure approximation de la courbe des hauteurs considérées. Pour une valeur fixe de i , il est construit d'après les formules de VERCELLI (1946):

$\frac{1}{4}(\gamma_{-1} + 2\gamma + \gamma_1)$, $\frac{1}{8}(\gamma_{-4} + 2\gamma_{-2} + 2\gamma + 2\gamma_2 + \gamma_4)$, appliquées dans l'ordre indiquée. L'axe central de v' est construit sur le même modèle.

Pour chaque courbe on a calculé l'erreur

moyenne $m = \sqrt{\frac{1}{n} \sum e^2}$, e étant la différence d'un point de la courbe et la $v' - v'_i$ correspondante. On trouve, en unités de mm, les valeurs suivantes, première colonne.

Aarhus	6,8	9,6
Hornbæk	8,9	10,5
Köbenhavn	7,1	7,9
Gedser	10,4	10,9
Korsör	4,5	4,9
Slipshavn	5,9	6,4
v'	27,8	27,8

Les nombres de la deuxième colonne sont les erreurs moyennes que l'on trouve par un procédé tout analogue au précédent, mais sans tenir compte de la corrélation entre les niveaux donnés v_i . Les courbes construites alors ressemblent beaucoup aux courbes rendues ici, mais peuvent s'en écarter systématiquement de 2—6 mm.

Les erreurs moyennes semblent justifier l'emploi des mm. Les courbes donnent l'impression d'une variation individuelle très marquée des niveaux des zéros locaux. A Korsör, le repère de contrôle qui définit le zéro local, a été remplacé par un autre repère en 1926; ce changement se révèle par un changement dans l'inclinaison de la courbe.

La courbe de v' a ses maxima coïncidant avec les époques des minima des taches solaires.

REFERENCES

- ASSOCIATION D'OÉANOGRAPHIE PHYSIQUE, 1940: *Monthly and Annual Mean Heights of Sea-Level*. Up to and including the year 1936. Publication Scientifique No. 5, 86—91.
- *Monthly and Annual Mean Heights of Sea-Level 1937—1946* and unpublished data for earlier years. Publication Scientifique No. 10, 35—36.

STUMPF, K., 1940: *Ermittlung und Realität von Periodizitäten. Korrelationsrechnung*. Berlin, Handbuch der Geophysik X, 84 pp.

VERCELLI, F., 1946: *Analisi Periodale dei Diagrammi*. Trieste, Istituto Geofisico, Pubbl. n. 221, 5.