

Zur numerischen Wettervorhersage mittels Relaxationsmethode unter Einbeziehung barokliner Effekte. II¹

K. HINKELMANN, Deutscher Wetterdienst, Bad Kissingen

(Manuscript received January 20, 1953)

II. Lösungsmethoden

Es sollen 2 Lösungsverfahren kurz behandelt werden, die zur Berechnung der im Abschn. III. gezeigten Lösungen benutzt wurden. Jedoch sind auch andere Lösungsverfahren anwendbar.²

1.) Relaxationsmethode nach R. Southwell:

Zur Lösung des Differenzengleichungssystems (16), in welchem die obere und untere Randbedingung (7, 8) bereits enthalten sind, ist besonders für Handberechnungen die Relaxationsmethode von Southwell geeignet.

Man geht bei diesem Lösungsverfahren von einem an sich beliebigen bequemen Lösungsansatz, im allgemeinen von $\tau = 0$ (Lösung nullter Näherung) aus. Dann geben die rechten Seiten von (16) den Fehler R an, um den die Gleichungen durch den Ansatz $\tau = 0$ nicht erfüllt sind. Diesen Fehler bezeichnet man allgemein als Residuum.

Durch schrittweise Verbesserung des τ -Feldes versucht man, das Residuum gleichmäßig im gesamten Gitterfeld gegen 0 konvergieren zu lassen.

Als erste Näherung τ^1 benutzt man gewöhnlich

$$\tau_k^1 = \delta \tau_k^0 = A_k h_k \quad \text{mit} \quad A_k = \frac{1}{4 + \alpha_{k+} + \alpha_{k-}}$$

In diesem Falle ist das zum Ansatz $\tau = 0$ gehörige Residuum R mit dem inhomogenen Term der Gleichungen (16) identisch. Da die

¹ Continued from Vol. 5, No. 3.

² z. Bsp. die Verwendung des modernisierten Gaußschen Algorithmus, vgl. dazu die Berichte Nr. 5, 6 des Instituts für Praktische Mathematik, Darmstadt.

Tellus V (1953), 4

Gleichungen (16) einen Funktionswert τ_k^{ij} mit den Funktionswerten $\tau_k^{i \pm 1, j}$, $\tau_k^{i, j \pm 1}$, $\tau_{k \pm 1}^{ij}$ funktionell verknüpfen, bewirkt eine Änderung $\delta \tau_k^{ij}$ eine Änderung des Residuums nicht nur im Aufpunkt $\mathbf{r}_k^{ij}$ selbst, sondern auch in den je um eine Maschenweite vom Aufpunkt entfernten Nachbarpunkten.

Im vorliegenden Falle ergibt eine Änderung $\delta \tau_k^{ij}$ folgende Änderungen der Residuen.

$$\delta R_k^{ij} = -A_k^{ij} \delta \tau_k^{ij}, \quad \delta R_k^{i \pm 1, j} = \delta R_k^{i, j \pm 1} = \delta \tau_k^{ij} \quad (18 \text{ a})$$

$$\delta R_{k+1}^{ij} = \alpha_{k+1}^{ij} \delta \tau_k^{ij}; \quad \delta R_{k-1}^{ij} = \alpha_{k-1}^{ij} \delta \tau_k^{ij} \quad (18 \text{ b})$$

wie man sich leicht klarmacht, wenn man den Gitterpunkten $\mathbf{r}_k^{ij}$, $\mathbf{r}_k^{i \pm 1, j}$, $\mathbf{r}_k^{i, j \pm 1}$, $\mathbf{r}_{k \pm 1}^{ij}$ die zugehörigen Gleichungen (16) zuordnet. Anstelle von (18 b) liefert jedoch entsprechend Gleichung (16 b) eine Änderung

$\delta \tau_k^{ij}$ im Punkte $k = 1/2$ die Residualänderungen $\delta R_{k+1}^{ij} = \alpha_{k+1}^{ij} \delta \tau_k^{ij}$; $\delta R_{k-1}^{ij} = 0$ und analog Gleichung (16 c) eine Änderung

$\delta \tau_k^{ij}$ im Punkte $k = n - 1/2$ die Residualänderungen

$$\delta R_{k-1}^{ij} = \alpha_{k-1}^{ij} \delta \tau_k^{ij}; \quad \delta R_{k+1}^{ij} = 0$$

Die durch eine Änderung von $\delta \tau$ entstehende neue R -Verteilung kann wiederum zur Verbesserung der τ -Werte benutzt werden, entsprechend erhält man als zweite Näherung $\tau^2 = \tau^1 + \delta \tau^1$; mit $\delta \tau^1 = \bar{R}A$ und gem. obigem Schema (18) neue Residuen $\bar{R}$ usw.

Die obige Annahme $\delta \tau_k^{ij} = A_k^{ij} R_k^{ij}$ bewirkt also gerade, daß das Residuum in Punkte ($\mathbf{r}_k^{ij}$) exakt verschwindet. Allerdings wird durch

Verfügung über die τ -Werte in der Nachbarschaft von $(\mathbf{r}_k^{ij})$ wiederum ein R_k^{ij} erzeugt.

Beim Relaxieren muß deshalb angestrebt werden, die Änderung von τ im Aufpunkt $(\mathbf{r}_k^{ij})$ und in den Nachbarpunkten so abzustimmen, daß R_k^{ij} erst durch die vom Aufpunkt und von den Nachbarpunkten herrührenden Änderungen möglichst klein wird.

Eine schnellere Konvergenz wird z. B. erreicht, wenn man anstelle der Abschätzung $\delta\tau_k^l = A_k R_k^l$ die dem Lösungswert näherkommende Abschätzung

$$\delta\tau_k^l = A_k R_k^l + A_k (\sum A_k^{i'j'} R_k^{i'j'} + \alpha_{k+} A_{k+1} R_{k+1}^l + \alpha_{k-} A_{k-1} R_{k-1}^l) \quad (19)$$

benutzt, vgl. dazu die Operatorenmethode in Abschn. II, 2

Jedoch braucht man sich bei Handberechnung nicht an ein starres Schema für die Verbesserung der τ -Werte zu halten. Durch geschicktes Schätzen der Funktionswerte τ bzw. deren Zuschläge zur vorangehenden Schätzung unter Berücksichtigung möglichst vieler Residualwerte in der Nähe des Schätzpunktes kann der Lösungsprozeß u. U. erheblich beschleunigt werden.

Als Resultat erhält man schließlich $\tau = \sum_{l=0}^N \delta\tau^l$, wobei der Prozeß abgebrochen werden kann, wenn N einem Residualfeld entspricht, das den Genauigkeitsansprüchen genügt, d. h. dessen Residualwerte R sich innerhalb der Fehlergrenzen der inhomogenen Terme h halten.

Die Behandlung der seitlichen Randnachbarkpunkte richtet sich nach den speziellen seitlichen Randbedingungen. Im Falle, daß die τ -Werte auf den seitlichen Randflächen vorgegeben werden, erübrigt sich selbstverständlich eine Residualwertkontrolle für die seitlichen Randpunkte.

2. Operatorenlösungsmethode.

Mit etwa dem gleichen Rechenaufwand kann die Lösung von (16) auch durch Anwendung der Operatorenlösungsmethode herbeigeführt werden, wie sie z. Bsp. für die zweidimensional barotrope Vorticity-Gleichung von R. FJØRTOFT (1952) — vgl. Gl. (16)' — benutzt wird. Gleichung (16 a)

$$\tau_k - A_k (\sum \tau_k^{i'j'} + \alpha_{k+} \tau_{k+1} + \alpha_{k-} \tau_{k-1}) = A_k h_k$$

schreibt sich, wenn folgender Mittelbildungsoperator

$$D \equiv A (\sum \tau_k^{i'j'} + \alpha_{k+} \tau_{k+1} + \alpha_{k-} \tau_{k-1})$$

eingeführt wird:

$$(1 - D) \tau = Ah \text{ mit der formalen Lösung}$$

$$\tau = \frac{1}{1 - D} Ah \quad (20a)$$

Unter der Voraussetzung, daß die Koeffizienten der Iterierten von D hinreichend rasch nach 0 konvergieren — ob diese Voraussetzung zutrifft, muß die Lösungsfolge erweisen — ist

$$\tau = (1 + D + D^2 + \dots + D^l \dots) Ah = \sum_{l=0}^{\infty} D^l Ah \quad (20b)$$

Wir setzen abkürzend $\delta\tau^l = D^l Ah$; dann ist

$$\tau = \sum_{l=0}^{\infty} \delta\tau^l \text{ und } \delta\tau^{l+1} = D (\delta\tau^l)$$

Man erhält damit:

$$\begin{aligned} \delta\tau_k^0 &= A_k h_k \\ \delta\tau_k^{l+1} &= D_k (\delta\tau^l) = A_k (\sum \delta\tau_k^{i'j'} + \\ &+ \alpha_{k+} \delta\tau_{k+1}^l + \alpha_{k-} \delta\tau_{k-1}^l) \end{aligned}$$

Naturgemäß konvergiert dieses Operatorenlösungsverfahren ebenso rasch wie der Relaxationsprozeß, wenn man sich bei letzterem bei der »Schätzung« der τ -Werte starr an das Schema (18) hält.

Eine raschere Konvergenz wird durch folgende Entwicklung bei etwas veränderter Bedeutung der $\delta\tau^l$ erreicht:

$$\begin{aligned} \delta\tau^0 &= (1 + D) Ah \\ \delta\tau^1 &= D^2 (1 + D) Ah = D^2 (\delta\tau^0) \\ \delta\tau^{l+1} &= D^2 (\delta\tau^l) \end{aligned}$$

Als Lösung erhält man wiederum

$$\tau = \sum_{l=0}^{\infty} \delta\tau^l \quad (21)$$

Das Lösungsverfahren erfordert die Bestimmung des Operators D^2 . Durch Anwendung von D_k auf $D_k \psi = A_k (\sum \psi_k^{i'j'} + \alpha_{k+} \psi_{k+1} + \alpha_{k-} \psi_{k-1})$ erhält man

$$[A_k^{-1} (D_k)^2 \psi]^{ij} = \sum A_k^{i'j'} (\sum \psi_k^{i'j'} + \alpha_{k+}^{ij} \psi_{k+1}^{ij} + \alpha_{k-}^{ij} \psi_{k-1}^{ij}) + \alpha_k + A_{k+1} (\sum \psi_{k+1}^{i'j'} + \alpha_{k+1+} \psi_{k+2} + \alpha_{k+1-} \psi_k) + \alpha_{k-} A_{k-1} (\sum \psi_{k-1}^{i'j'} + \alpha_{k-1+} \psi_k + \alpha_{k-1-} \psi_{k-2})$$

und nach Zusammenfassen von ψ -Werten gleicher Gitterpunkte.

$$[A^{-1} D^2 \psi]_k^{ij} = (\sum A_k^{i'j'} + A_{k+1}^{ij} \alpha_{k+}^{ij} + \alpha_{k+1-}^{ij} + A_{k-1}^{ij} \alpha_{k-}^{ij} + \alpha_{k-1+}^{ij}) \psi_k^{ij} + A_{k+1}^{i+1,j} \psi_k^{i+2,j} + A_{k-1}^{i-1,j} \psi_k^{i-2,j} + A_{k+1}^{i,j+1} \psi_k^{i,j+2} + A_{k-1}^{i,j-1} \psi_k^{i,j-2} + (A_{k+1}^{i+1,j} + A_{k-1}^{i-1,j}) \psi_k^{i+1,j+1} + (A_{k+1}^{i+1,j} + A_{k-1}^{i-1,j}) \psi_k^{i-1,j+1} + (A_{k+1}^{i,j+1} + A_{k-1}^{i,j-1}) \psi_k^{i+1,j-1} + (A_{k+1}^{i,j+1} + A_{k-1}^{i,j-1}) \psi_k^{i-1,j-1} + A_{k+1}^{i,j} \alpha_{k+1+}^{i,j} \psi_{k+2}^{i,j} + A_{k-1}^{i,j} \alpha_{k-1-}^{i,j} \psi_{k-2}^{i,j} + \sum (A_k^{i'j'} \alpha_{k+}^{i'j'} + A_{k+1}^{i,j} \alpha_{k+}^{i,j} \psi_{k+1}^{i'j'} + \sum (A_k^{i'j'} \alpha_{k-}^{i'j'} + A_{k-1}^{i,j} \alpha_{k-}^{i,j} \psi_{k-1}^{i'j'})$$

Beim Übergang von $\delta \tau$ auf $\delta \tau^{l+1}$ zur Verbesserung der Lösungsfunktion mittels der Folge (21) gehen zur Bestimmung von $\delta \tau^{l+1}$ bereits 18 dem Aufpunkt benachbarte τ -Werte ein.

Allgemein führt die Entwicklung $\tau_k = (1 + D + D^2 + \dots)_k$ Ah, die alle h -Werte des Raumgitters in dem betrachteten Integrationsgebiet erfaßt, auf die Bestimmung der lösenden Kerngitterfunktion des Differenzengleichungssystems im Punkte $\mathbf{r}_k^{ij}$, dargestellt durch die Koeffizienten der h -Gitterwerte. s. III.

Die Berücksichtigung der Randbedingungen erfolgt dabei automatisch, wenn der Operator D an den Randnachbarpunkten entsprechend den Koeffizienten von (16 b, c) definiert wird.

Praktische Rechenversuche mit Hilfe der Relaxations- oder Operatorenlösungsmethode ergaben, daß bei willkürlicher Streuung der inhomogenen Terme, wie das bei tatsächlichen Wettersituationen auftritt, etwa 5—10 Relaxationen bzw. Operatorenschritte für jeden Gitterpunkt durchzuführen sind, bis eine ausreichende Genauigkeit der Lösungsfunktion τ erreicht wird.

Eine wesentlich schnellere Konvergenz wäre sicherlich herbeizuführen, wenn mit Hilfe von Einfluß- oder Greenschen Funktionen eine wenn auch grobe Vorschätzung des Tendenzfeldes τ durchgeführt werden könnte.

Tellus V (1953), 4

Unglücklicherweise hängen jedoch die Koeffizienten des Differentialausdrucks in 16 wegen der darin vorkommenden σ , η -Terme ebenfalls wie die inhomogenen Glieder der rechten Seite von (16) von der zu behandelnden Wettersituation ab.

Um eine Vorstellung zu vermitteln, mit welcher unterschiedlichem Gewicht inhomogenes Feld h und Koeffizientenfeld α des Differentialausdrucks die Lösung beeinflussen, sollen die Gleichungen (16) hinsichtlich der von z und inneren Ableitungen von z abhängigen Größen linearisiert werden:

Wir machen für das stationäre Grundfeld (überstrichene Größen) folgenden Ansatz:

$$\bar{z} = L(p) \cdot \gamma + l(p); \text{ dann ist } \bar{\eta} = f; \text{ weiterhin sei } f_x \approx 0$$

Für das Störungsfeld z' ; $z = \bar{z} + z'$, sollen keine einschränkenden Annahmen gemacht werden. Linearisierung der Koeffizienten der Vorticity-Gleichung:

$$\Delta \tau - \frac{f}{m^2 g} \eta^2 \left(\frac{\omega}{\eta} \right)_p = -J(z, \eta)$$

ergibt wegen $\bar{\omega} = \bar{\tau} = 0$

$$\Delta \tau' - \frac{f}{m^2 g} \bar{\eta} \omega_p = \Delta \tau - \frac{f^2}{m^2 g} \omega_p = -J(\bar{z}, \eta') - J(z', f) \quad (22)$$

Linearisierung der Koeffizienten des I. Hauptsatzes (6) mit

$$\frac{dq}{dt} = 0; \omega = -\frac{g}{\sigma} (\tau_p + Q) = -\frac{g}{\sigma} \left[\tau_p - \frac{g m^2}{f} J(z_p, z) \right]$$

ergibt wegen $\bar{Q} = J(\bar{z}_p, \bar{z}) = 0$

$$\omega' = -\frac{g}{\sigma} (\tau'_p + Q') \text{ mit} \quad (23)$$

$$Q' = \frac{g}{f} m^2 (\bar{z}_{py} z'_x - z'_{px} \bar{z}_y) = \frac{m^2}{f} \frac{R}{p} (T_x \bar{z}_y - \bar{T}_y z'_x)$$

$$\bar{\sigma} = \frac{g}{\kappa p} \bar{z}_p + g \bar{z}_{pp},$$

worin wegen der speziellen Wahl des Grundzustandes die Akzente auch fortgelassen werden können.

Elimination von ω aus (22) und (23) und Ersetzen der τ und ω enthaltenden Differentialausdrücke durch entsprechende Differenzenausdrücke ergibt anstelle (16a)

$$\begin{aligned} & (4 + \alpha_k + \alpha_{k-1}) \tau_k - \alpha_k \tau_{k+1} - \alpha_{k-1} \tau_{k-1} - \\ & - \sum \tau_k^{i'j'} = h_k^{ij} = \mu^2 J_k(\bar{z}, \eta') + \mu^2 J_k(z', f) + \\ & + \nu (\alpha_k Q_{k+\frac{1}{2}} - \alpha_{k-1} Q_{k-\frac{1}{2}}) \text{ mit} \\ & \alpha_{k\pm} = \frac{f^2 \mu^2}{m^2 \nu^2 \bar{\sigma}_{k\pm}} \text{ für } 1 < k < n-1 \quad (24) \end{aligned}$$

und (16b) und (16c) analoge Gleichungen für $k = 1/2$ und $k = n - 1/2$.

Nach Linearisierung treten in dem Differenzenoperator von τ d. h. auf der linken Seite von Gleichung (24), keine Störgrößen mehr auf. Das legt den Schluß nahe, daß man auch mit einem α -Feld eines Grundzustandes, der von der speziellen Wetterlage unabhängig ist, noch zu einer vernünftigen Lösung gelangen kann. Die Tatsache, daß jetzt wegen $\eta = f$

$$\alpha_{k\pm} = \alpha_{k\pm 1}, \mp$$

läßt weiterhin vermuten, daß auch der vertikale Vorticitytransport $\omega\eta$ einen geringeren Einfluß auf die Lösung ausübt als der Divergenzausdruck $\eta\omega_p$.

Wir werden also berechtigt sein, uns zumindest einen Überblick über den vermutlichen Lösungsverlauf zu verschaffen unter Zugrundelegung eines von den speziellen Topografien unabhängigen Koeffizientenfeldes α .

Dies hat den entscheidenden Vorteil, daß man mit Greenschen Standardfunktionen G ohne einen Iterationsprozeß zu einer Näherungslösung τ , ω gelangen kann, wobei bei einer nur von p abhängigen Standardatmosphäre diese Greenschen Funktionen sogar weitgehend invariant gegen Koordinatenverschiebung in x , y sein werden, zumindest in hinreichendem Abstand von der seitlichen Begrenzungsfläche.

Mit Hilfe solcher ebenfalls mit Hilfe der Relaxations- oder Operatorenlösungsmethode gewinnbarer Funktionen G kann man sich durch eine einmalige Integration bzw. Summation die zu dem Standard- α -Feld gehörige Lösung eines beliebigen Feldes inhomogener Terme verschaffen, die als Vorschätzung der Lösung des aktuellen α -Feldes betrachtet wird.

Nach Auswechseln der α -Koeffizienten erhält man sicherlich nach wenigen Relaxations- bzw. Operatorenschritten eine dem variablen

α -Feld zugeordnete Lösung, wenn mit der mit Hilfe Greenscher Funktionen gewonnenen Näherungslösung begonnen wird.

III. Anwendungen

Die Fig. 4–13 geben einige Einflußfunktionen für verschiedene Lagen des Quellpunktes wieder: Wir wollen unter einer Einflußgitterfunktion $I(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ eine Lösungsfunktion τ verstehen, die in allen inneren Gitterpunkten die Differenzengleichungen (16a–c) mit $h_k^{ij} \equiv 0$ erfüllt, mit Ausnahme des Quellpunktes $\mathbf{r}'_{(k'')}$, wo $h_{k'}^{i'j'} \neq 0$ sei. Entsprechend lassen sich Einflußfunktionen I als Lösungsfunktion der Gln. (16) definieren, wo im Quellpunkt $\mathbf{r}'$ nur entweder der Vorticitytransport $\mu^2 J(z, \eta)$ oder die thermische Quantität Q von Null verschieden ist.

Im Falle $\mu^2 J(z, \eta) \neq 0$, $Q = 0$ für $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ist

$$h_{k'}^{i'j'} = \mu^2 J_{k'}^{i'j'}(z, \eta)$$

$$\text{und } h = 0 \text{ für } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$$

Im Falle $Q \neq 0$, $\mu^2 J(z, \eta) = 0$ für $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ist

$$h_{k'+\frac{1}{2}}^{i'j'} = -\alpha_{k'+\frac{1}{2}}^{i'j'} - \nu Q_{k'}^{i'j'}; \quad h_{k'-\frac{1}{2}}^{i'j'} = +\alpha_{k'-\frac{1}{2}}^{i'j'} + \nu Q_{k'}^{i'j'}$$

$$\text{und } h = 0 \text{ für } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}'_{k'\pm\frac{1}{2}}$$

Ein »punktförmiger« Term Q_k^{ij} kann demnach in seiner Wirkung auf das Lösungsfeld durch einen Dipol im Vorticitytransport:

$$\mu^2 J(z, \eta)_{k'\pm\frac{1}{2}}^{i'j'} = \mp \alpha_{k'\pm\frac{1}{2}}^{i'j'} \mp \nu Q_{k'}^{i'j'}$$

ersetzt werden.

Setzt man für die inhomogenen Bestandteile im Quellpunkt einen Einheitswert an, so hängen die Einflußfunktionen lediglich vom Koeffizientengitterfeld des Differenzenoperators nach (16) ab. Gewählt wurde im Quellpunkt für $\mu^2 J(z, \eta)$ bzw. aus Dimensionsgründen für

$$\begin{aligned} pQ &= \frac{R}{g} \left(\frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \\ &= \frac{R}{g} \left(\frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} + \frac{m^2 g}{f} J(T, z) \right) \end{aligned}$$

der Wert von 100 Einheiten [m. std⁻¹]. Da die Differentialgleichungen (5, 6) in τ , ω bzw. die Differenzengleichungen (16) in τ linear sind, gilt das Superpositionsprinzip. D. h. bei beliebiger Verteilung der inhomogenen Terme gibt die auf h angewandte Einflußfunktion $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ im Punkte $\mathbf{r}_{(k')}$ den Anteil des Lö-

sungswertes τ in % des inhomogenen Terms h im Punkte $\mathbf{r}^{(j)}$ an. Zur Berechnung der in der Fig. 4—13 dargestellten Einflußfunktionen wurde ein α -Koeffizientengitterfeld einer Standardatmosphäre zugrundegelegt mit einer von x, y unabhängigen z - und damit T -Verteilung mit folgenden Daten:

$$T|_{\substack{z=0 \\ p=1000 \text{ mb}}} = 283,2^\circ; \frac{\partial T}{\partial z} = -6^\circ \text{ km}^{-1} \text{ für } p \geq 225 \text{ mb};$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0 \text{ für } p \leq 225 \text{ mb};$$

als Maschenweite wurde $\mu = 300 \text{ km}$, $\nu = 50 \text{ mb}$ gewählt.¹

Wegen der automatisch durch (16a—c) erfüllten kinematischen Randbedingungen einerseits und der Abhängigkeit der Koeffizienten α von p, x, y hängt selbstverständlich der Verlauf der Einflußfunktion $I(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ wesentlich von der Lage des Quellpunktes $\mathbf{r}'$ ab.

Wegen der relativ geringen Variabilität von α mit x, y gegenüber der Abhängigkeit von p wird die Einflußfunktion jedoch weitgehend invariant gegenüber einer horizontalen Verschiebung des Quellpunktes $\mathbf{r}'$ sein, zumindest soweit der Quellpunkt noch hinreichend weit vom seitlichen Rand entfernt ist. Wir wollen uns deshalb bei der Berechnung von Einflußfunktionen auf eine Quellpunktslage im mittleren Breite (φ' in etwa 50° geogr. Breite) beschränken und lediglich die p' -Koordinate des Quellpunktes variieren.

In den Fig. 4—13 sind einige derartige Einflußfunktionen in einem den Quellpunkt in $\varphi' = 51^\circ$ enthaltenden Meridionalschnitt $x = \text{const.}$ ² wiedergegeben, wobei einmal $\mu^2 J(z, \eta) = 100$ Einheiten in den Quellpunkten

$p' = 975, 725, 475, 275, 75 \text{ mb}$ resp.

und einmal $pQ = 100$ Einheiten in den Quellpunkten

$p' = 950, 700, 500, 300, 100 \text{ mb}$ resp.

angesetzt wurde.

¹ Bei einer stereographischen Projektion mit $\varphi_0 = 60^\circ$ erhält man für die Vertikalsäule in einer Breite von $\varphi \approx 51^\circ$ folgende Werte für die dimensionlose Größe α :

$p = 1000$	950	900	850	800	750	700	650	600	550	500	450	400	350	300	250	200	150	100	50
$\alpha = 0,25$	41,6	37,7	33,9	30,4	27,0	23,8	20,8	18,0	15,3	12,9	10,6	8,6	6,7	5,1	3,6	0,92	0,52	0,23	0,06

wobei wegen $\eta = f$ $\alpha_{k\pm} = \alpha_{k\pm 1, \mp}$ ist.

² Der Verlauf der Einflußfunktionen ist nahezu rotationssymmetrisch.

Tellus V (1953), 4

6—303942

Obwohl Lösungen von (16) naturgemäß nur Gitterfunktionen mit definierten Werten an den Gitterpunkten allein liefern können, wurde in den Abbildungen aus Gründen der Anschaulichkeit eine durch Interpolation gewonnene kontinuierliche Darstellungsweise gewählt.

Da jeder Gitterpunkt ein Volumelement $\mu^2 \nu$ repräsentiert, so approximiert das τ -Feld der Fig. 4—13 demnach übergreifende räumliche Mittelwerte der Lösungsfunktion τ der Differentialgl. (5—6)

$$\tau_{\text{Differenzgl.}} \approx \frac{1}{\mu^2 \nu} \int_{x-\frac{\mu}{2}}^{x+\frac{\mu}{2}} \int_{y-\frac{\mu}{2}}^{y+\frac{\mu}{2}} \int_{p-\frac{\nu}{2}}^{p+\frac{\nu}{2}} \tau_{\text{Differentialgl.}} dx dy dp$$

Der Differentialausdruck $L[\tau]$, den man durch Elimination von ω aus (5, 6) gewinnt, ergibt sich zu

$$L[\tau] = \Delta \tau + f \eta^2 \left(\frac{\tau_p}{\sigma \eta} \right)_p$$

Dieser wegen $\frac{\eta}{\sigma} > 0$ elliptische Differentialausdruck ist dann selbstadjungiert³, wenn $\eta_p = 0$,

³ Liegt eine (elliptische) Differentialgleichung der Form

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^3 a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^3 a_i u_{x_i} + a_0 u = h; \quad a_{ij}, a_i, a_0, h =$$

= Funktionen von x_1, x_2, x_3

vor, so wird der Differentialausdruck $L[u]$ dann als selbstadjungiert bezeichnet, wenn gilt:

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^3 (a_{ij} u)_{x_i x_j} - \sum_{i=1}^3 (a_i u)_{x_i} + a_0 u$$

Für einen selbstadjungierten (elliptischen) Differentialausdruck läßt sich dann die Lösung in der Form darstellen:

$$u(x_1, x_2, x_3) = - \int u(s) G_n ds +$$

$$+ \iiint G(x'_1, x'_2, x'_3; x_1, x_2, x_3) h(x'_1, x'_2, x'_3) dx'_1 dx'_2 dx'_3,$$

wobei das erste Integral über den Rand des Integrationsgebietes, das 2. Integral über den Integrationsraum zu erstrecken ist. Der Kern G wird als Greensche Funktion bezeichnet und genügt der Symmetrieeigenschaft

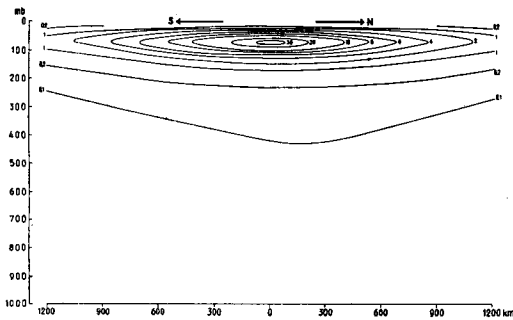


Fig. 8.

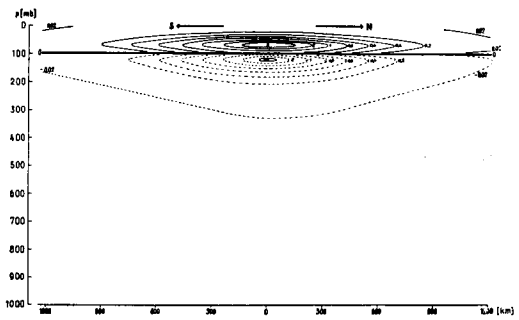


Fig. 13.

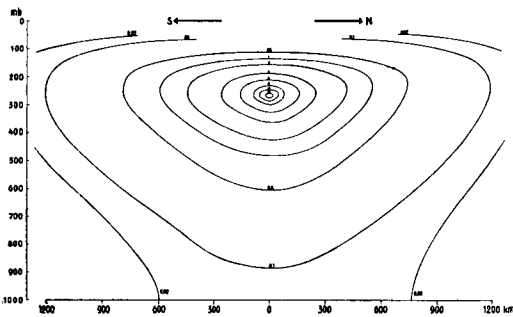


Fig. 7.

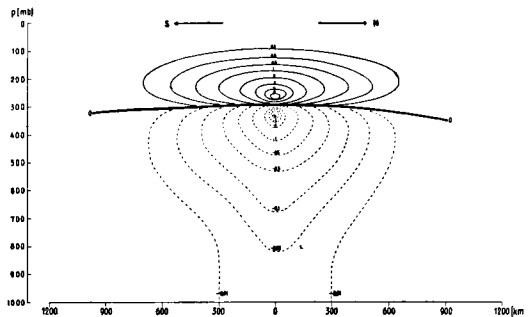


Fig. 12.

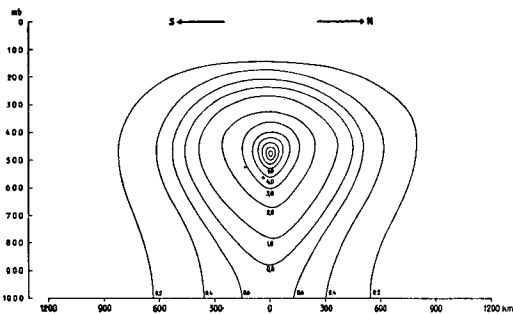


Fig. 6.

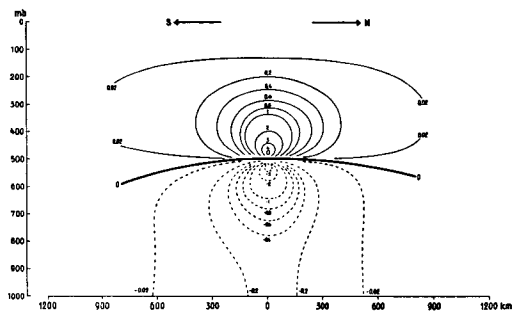


Fig. 11.

$$G(x'_1, x'_2, x'_3; x_1, x_2, x_3) = G(x_1, x_2, x_3; x'_1, x'_2, x'_3)$$

Im Falle, daß die Randwerte $u(s)$ verschwinden, verschwindet das Randintegral.

Die Lösung des Differenzgleichungssystems läßt sich dann analog zu

$$u_k^{ij} = \sum G_k^{i'j'} h_k^{i'j'}$$

darstellen und die Einflußgitterfunktion $I(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ wegen der Symmetrie unmittelbar als Greensche Funktion interpretieren.

was wegen $\eta = f$ im Falle der gewählten Standardatmosphäre erfüllt ist.

Im vorliegenden Fall verschwinden die Randwerte τ an den Grenzflächen $p = 0$ und $p = p^* = 1000$ mb jedoch nicht notwendigerweise, so daß auch die Symmetrie der Einflußfunktion geringfügig gestört ist. Analytisch kommt dieser Sachverhalt in der unterschiedlichen Form der Koeffizienten des Differenzenoperators der Gl. (16) für Randnachbarnpunkte und die übrigen

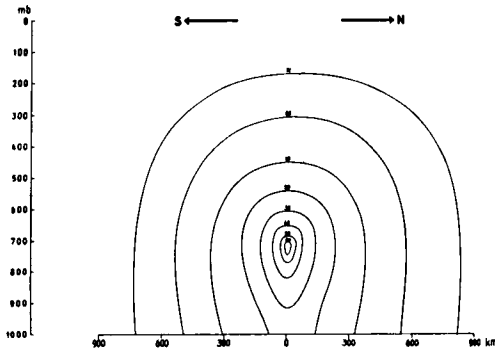


Fig. 5.

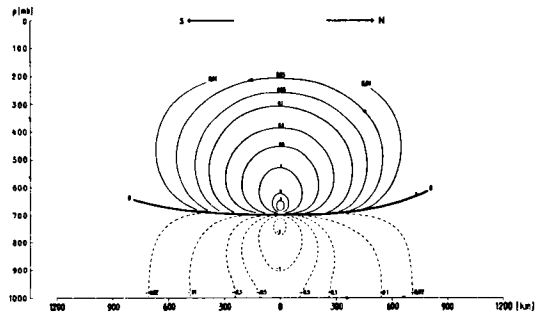


Fig. 10.

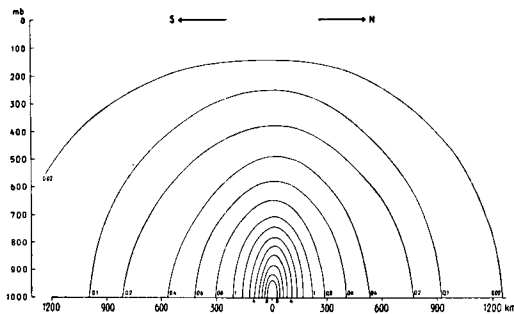


Fig. 4.

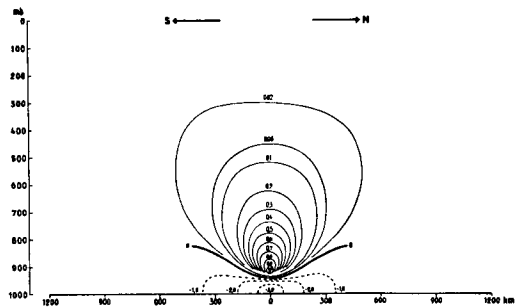


Fig. 9.

Fig. 4—8. Einflußfunktion $\tau \left[\frac{\text{dm}}{\text{Std}} \right]$ mit einem nichtverschwindenden dynamischen Jacobiausdruck $\mu^2 J_{k'}^{ij'}(z, \eta) = 100 \left[\frac{\text{dm}}{\text{Std}} \right]$ im Störpunkt $\mathbf{r}'$ in $\varphi' \approx 51^\circ$ Breite und $p' = 975$ mb (Fig. 4), 725 mb (Fig. 5), 475 mb (Fig. 6), 275 mb (Fig. 7), 75 mb (Fig. 8). $T_z = -6^\circ/\text{km}$ in der Troposphäre; $\eta = f$.

Fig. 9—13. Einflußfunktionen $\tau \left[\frac{\text{dm}}{\text{Std}} \right]$ mit einem nichtverschwindenden Jacobiausdruck $(pQ)_{k'}^{ij'} = 100 \left[\frac{\text{dm}}{\text{Std}} \right]$ entspricht einem Wert $\left(\frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T \right)_{k'}^{ij'} = 3,42 \left[\frac{^\circ\text{K}}{\text{Std}} \right]$ im Störpunkt $\mathbf{r}'$ in $\varphi' \approx 51^\circ$ Breite und $p' = 950$ mb (Fig. 9), 700 mb (Fig. 10), 500 mb (Fig. 11), 300 mb (Fig. 12), 100 mb (Fig. 13). $T_z = -6^\circ/\text{km}$ in der Troposphäre, $\eta = f$.

gen inneren Gitterpunkte zum Ausdruck. Auch im Falle der Asymmetrie von I, was insbesondere für $\eta_p \neq 0$ gilt, kann man jedoch stets wegen der Gültigkeit des Superpositionsprinzips bei durch die α gegebenem Differenzenausdruck eine lösende Funktion G aus den Einflußfunktionen sich so zusammensetzen, daß

$$\tau_k^{ij} = \sum G_k^{ij'} h_{k'}^{ij'},$$

Summation über alle inneren Gitterpunkte. Man findet $G_k^{ij'} = I_k^{ij'}$. Das bedeutet, daß vor Aufstellung der Greenschen Funktion oder besser des lösenden Kerns G die Einflußfunktionen für sämtliche Innenpunkte zu berechnen sind.

Tellus V (1953), 4

Jedoch wird ein derartiger lösender Gitterkern G bei Behandlung aktueller Wettersituationen, also bei beliebiger Anordnung der α und h -Werte, nur dann mit Vorteil zu benutzen sein, wenn sich erweist, daß auch eine Lösung mit einem von der speziellen Wetterlage unabhängigen Differenzenausdruck (seitlicher Mittelwert) die tatsächliche Lösung approximiert.

Man wird in diesem Falle diese Approximation als erste Näherung im Relaxations- bzw. Operatorenverfahren zur Abkürzung des Lösungsprozesses mit dem aktuellen Differenzoperator verwenden können.

Liegt eine Lösung τ vor, so gewinnt man durch Differenzenprozesse das Feld der Vertikalgeschwindigkeit aus (17)

$$\omega_k = \frac{g}{\nu \sigma_k} (\tau_{k+\frac{1}{2}} - \tau_{k-\frac{1}{2}} + \nu Q_k)$$

und das Tendenzfeld der Temperatur sowie die horizontale Divergenz aus den beiden folgenden Betimmungsgleichungen:

$$(T_i)_k = -\frac{p_k}{\nu} \frac{g}{R} (\tau_{k+\frac{1}{2}} - \tau_{k-\frac{1}{2}}) \\ -\nu (\text{Div } \mathbf{v})_k = \omega_{k+\frac{1}{2}} - \omega_{k-\frac{1}{2}}$$

Für Quellpunkte in Tropopausennähe sind diese letzten 3 Felder für ein $\mu^2 J(z, \eta) = 100$ (m/Std.) in $p' = 275$ mb bzw. $p' Q = 100$ (m/Std.) im Quellpunkt $p' = 300$ mb in den Fig. 14—19 dargestellt worden.

Die Einflußfunktionen lassen unmittelbar die Flächen gleichen Einflußgewichts und die praktische Einflußreichweite einer Störung in Form einer Vorticity-Advektion bzw. eines pQ -Wertes im Quellpunkt ablesen.

Sie vermitteln andererseits auch einen Einblick in den atmosphärischen Mechanismus, wie er durch die definierten Störquellen ausgelöst wird. Insbesondere liefern die zugehörigen Lösungsfelder eine quantitative Vorstellung von dem atmosphärischen Kompensationsmechanismus.

Der Annahme quasistatisch verlaufender Prozesse liegt zwar die physikalische Conception unendlicher Signalgeschwindigkeit zugrunde, d. h. es existiert ein starrer Übertragungsmechanismus sowohl zwischen horizontal als auch vertikal benachbarten Gitterpunkten, der eine zeitlose Beeinflussung durch eine Störquelle auf den meteorologischen Zustand eines beliebig weit davon entfernten Gitterpunktes zuläßt.

So enthält z. B. die Tendenzgleichung in der aus der Kontinuitätsgleichung $\omega_p = -\text{Div } \mathbf{v}$ und oberen und unteren Randbedingung ableitbaren Form

$$\tau^* = -\frac{1}{gQ^*} \int_0^p \text{Div } \mathbf{v} dp + M$$

die physikalische Aussage, daß eine Massenhäufung in einer Schicht dp eine nicht von deren Entfernung vom Erdboden abhängige Tendenz am Boden hervorruft. Wegen der

integralen Abhängigkeit muß jedoch stets die Möglichkeit unterstellt werden, daß eine Divergenz der einen Schicht in ihrer Wirkung auf den Bodendruck durch entsprechende Vorgänge in Schichten darüber oder darunter kompensiert wird, wobei a priori nichts darüber ausgesagt werden kann, ob derartige Massendivergenzen willkürlich über die Vertikalsäule verteilt sein können, oder ob funktionelle Beziehungen zwischen diesen Größen verschiedener Schichten bestehen.

Die synoptische Erfahrung erweist jedenfalls, daß allgemein das Kompensationsprinzip sowohl in der Form

$$\left| \int_0^{p^*} \text{Div } \mathbf{v} dp \right| \ll \int_0^p |\text{Div } \mathbf{v}| dp$$

als auch in der Form

$$\left| \int_0^{p^*} T_i d \ln p \right| \ll \int_0^{p^*} |T_i| d \ln p \text{ gilt;}$$

was auf eine Korrelation zwischen den Integralen innerhalb der betrachteten Vertikalsäule schließen läßt.

Beide Quantitäten $-\text{Div } \mathbf{v}$, T_i sind den Topographien eines Termins nicht zu entnehmen, zumindest nicht vollständig. Ableitbar aus simultanen aerologischen Meßdaten ist lediglich ein gewisser Beitrag, nämlich die ersten Terme der rechten Seiten folgender Bestimmungsgleichungen für $\text{Div } \mathbf{v}$ und T_i :

$$\eta \text{Div } \mathbf{v} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \eta - A;$$

$$A = \eta_t + \omega \eta_p = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) \frac{q}{f} \Delta Z$$

$$T_i = -\mathbf{v} \cdot \nabla T + B_1; \quad B_1 = \left(\frac{d}{dt} - \omega \frac{\partial}{\partial p} \right) T$$

$$T_i = \frac{g}{R} pQ + B_2; \quad B_2 = \frac{p}{R} \sigma \omega^{-1}$$

also die horizontalen Transporte der Vorticity und der Temperatur, bzw. mit der einschränkenden Annahme über die Kenntnis von $\frac{dq}{dt}$ die

¹ Man erhält diese Formulierung für T_i aus dem 1. Hauptsatz in der Form:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} + \frac{kT}{p} \frac{dp}{dt} = T_t + \mathbf{v} \cdot \nabla T + \omega T_p. \text{ Dann ist}$$

$$T_i = \frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T - \omega T_p + \omega \frac{kT}{p} = \frac{gpQ}{R} + \frac{p}{R} \sigma \omega$$

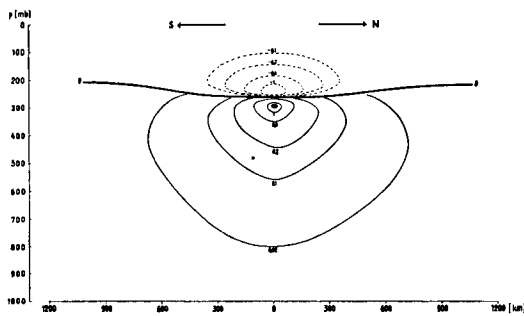


Fig. 14.

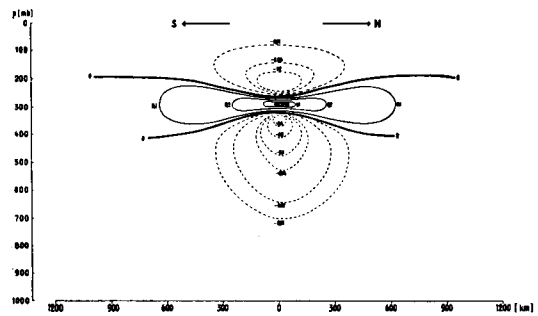


Fig. 17.

Fig. 14—16. Zur Einflußfunktion τ der Fig. 7 zugehöriges Temperaturänderungsfeld $T_t \left[\frac{^{\circ}K}{\text{Std}} \right]$ (Fig. 14); Vertikalgeschwindigkeitsfeld $-\omega \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$ (Fig. 15) und Feld der horizontalen Massendivergenz $-\nu \text{ Div } \mathbf{v} \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$ (Fig. 16).

Fig. 17—19. Zur Einflußfunktion τ der Fig. 12 zugehöriges Temperaturänderungsfeld $T_t \left[\frac{^{\circ}K}{\text{Std}} \right]$ (Fig. 17); Vertikalgeschwindigkeitsfeld $-\omega \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$ (Fig. 18) und Feld der horizontalen Massendivergenz $-\nu \text{ Div } \mathbf{v} \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$ (Fig. 19).

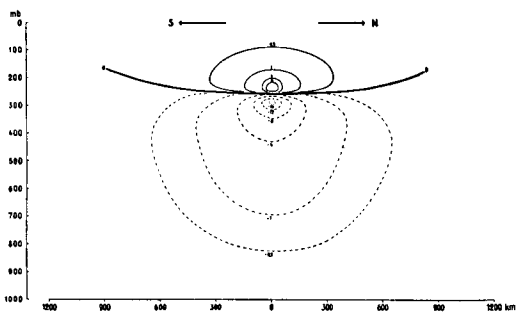


Fig. 15.

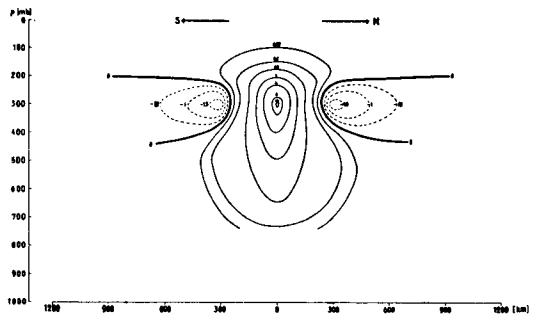


Fig. 18.

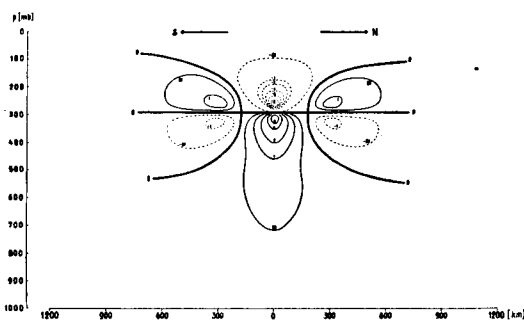


Fig. 16.

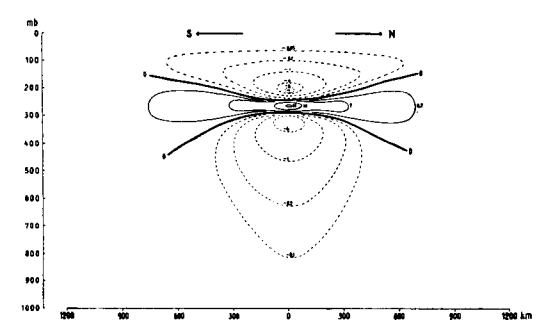


Fig. 19.

Größe Q ; während die weiteren Beiträge A bzw. B_1, B_2 zum Divergenz- und Temperaturtendenz Ausdruck nur durch die Rechnung bestimmt werden können.

Man könnte annehmen, daß die Kompensation dadurch zustande kommt, daß

$$\left| \int_0^{p^*} \mathbf{v} \cdot \nabla \eta \, dp \right| \leq \left| \int_0^{p^*} |\mathbf{v} \cdot \nabla \eta| \, dp \right| \text{ und dass}$$

$$\left| \int_0^{p^*} Q \, dp \right| \leq \left| \int_0^{p^*} |Q| \, dp \right| \text{ bzw.}$$

$$\left| \int_0^{p^*} \mathbf{v} \cdot \nabla T \, d \ln p \right| \leq \left| \int_0^{p^*} |\mathbf{v} \cdot \nabla T| \, d \ln p \right| \quad (25)$$

Jedoch dürfte eine solche Annahme physikalisch nicht begründbar sein. Eine physikalische Erklärungsmöglichkeit für die Kompensation würde darin bestehen, daß gezeigt werden kann, daß auch bei einer völlig beliebigen vertikalen Verteilung der Transportgrößen, also im ungünstigen Falle bei Gleichheit der rechten und linken Seiten obiger Ungleichungen, noch eine Kompensation stattfindet, also (25) oder zumindest

$$\left| \int_0^{p^*} \text{Div } \mathbf{v} \, dp \right| \leq \left| \int_0^{p^*} \mathbf{v} \cdot \nabla \eta \, dp \right| \text{ und}$$

$$\left| \int_0^{p^*} T_i \, d \ln p \right| \leq \left| \int_0^{p^*} \mathbf{v} \cdot \nabla T \, d \ln p \right| \text{ bzw. } \frac{g}{R} \left| \int_0^{p^*} Q \, dp \right| \text{ gilt.}$$

Eine derartige Kompensation käme dadurch zustande, daß die Advektionsgrößen $\mathbf{v} \cdot \nabla \eta$, $\mathbf{v} \cdot \nabla T$ bzw. $J(z, \eta)$, Q , die wir als primäre Divergenzen bzw. Temperaturtendenzen bezeichnen wollen, *automatisch* sekundäre Divergenzen und lokale Temperaturveränderungen A, B_1, B_2 im Quellpunkt selbst und in dessen Umgebung hervorrufen in einer Weise, daß sekundäre Felder A, B und primäre Quellen ($J(z, \eta)$, Q) sich weitgehend kompensieren, ein Mechanismus, den man als automatische Kompensation bezeichnen könnte.

Gerade diesen Sachverhalt bringen aber die Einflußfunktionen zum Ausdruck, wie man leicht den Meridionalschnitten der Fig. 14–19 sowie den Bilanzen innerhalb der den Quellpunkt enthaltenden Vertikalsäule entnimmt, die in Fig. 20, 21 dargestellt sind.

Man entnimmt diesen Bilanzdiagrammen unmittelbar, daß primäre Divergenzen und Temperaturtendenzen an einer bestimmten Stelle $\mathbf{r}'$ des Raumes sekundäre Divergenz-

bzw. Temperaturänderungseffekte am Quellpunkt $\mathbf{r}'$ selbst sowie in dessen Nachbarschaft auslösen, die einmal den primären Vorgang am Quellpunkt selbst abzuschwächen suchen und sich mit den primären Effekten soweit kompensieren, daß die Lösungsfelder aller met. Größen mit zunehmendem horizontalen und vertikalen Abstand vom Quellpunkt rasch abklingen, wobei noch das Ausmaß der Kompensation wesentlich von den Stabilitätsverhältnissen in der Atmosphäre abhängt¹.

Bei Abänderung der Stabilitätsverhältnisse σ und η werden die Einfluß- und damit Greenschen Funktionen insofern modifiziert, als niedrige η -Werte einen stärkeren »Durchgriff« des Einflusses in horizontaler Richtung, niedrige σ bzw. s -Werte (hohe statische Labilität) einen stärkeren »Durchgriff« in vertikaler Richtung auf Kosten der anderen Koordinaten bewirken, wobei die Gewichtsverteilung vorwiegend

durch die Kombination $\frac{\eta}{\sigma}$ des α -Koeffizienten bestimmt wird.

Als Beispiel zeigt Fig. 22 die zu Fig. 6 analoge Einflußfunktion, unter Zugrundelegung eines Temperaturgradienten von $9^\circ/\text{km}$ anstelle von $6^\circ/\text{km}$ in der Troposphäre, die eine merkliche Bevorzugung der vertikalen Koordinate anzeigt. Wie man sich diesen automatischen Kompensationsmechanismus physikalisch vorzustellen hat, sei kurz qualitativ erläutert, wobei das zeitliche Nebeneinander des quasistatischen Vorganges notwendigerweise in ein zeitliches Nacheinander eines nicht quasistatischen Prozesses aufgelöst werden muß. Im Falle einer

¹ Wegen empirischer Untersuchungen über den Koppelungsmechanismus advektiver und konvektiver Temperaturänderungen vgl. CRADDOCK (1951) und W. REGULA (1952).

Fig. 20. Einflußfunktion der Höhentendenz $\tau \left[\frac{\text{m}}{\text{Std}} \right]$, der Vertikalgeschwindigkeit $\omega \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$, der Temperaturänderung $T_t \left[\frac{^\circ\text{K}}{\text{Std}} \right]$ und der horizontalen Massendivergenz $-\nu \text{Div } \mathbf{v} \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$ innerhalb der den Störpunkt enthaltenden Vertikalsäule, ausgelöst durch einen nichtverschwindenden Jacobi-Ausdruck $\mu^2 J_{k'}''(z, \eta) = 100 \left[\frac{\text{m}}{\text{Std}} \right]$ im Störpunkt $\mathbf{r}'$ mit $\varphi' \approx 51^\circ$ Breite und $p' = 75 \text{ mb}$ (obere Reihe), 475 mb (mittlere Reihe), 975 mb (untere Reihe).

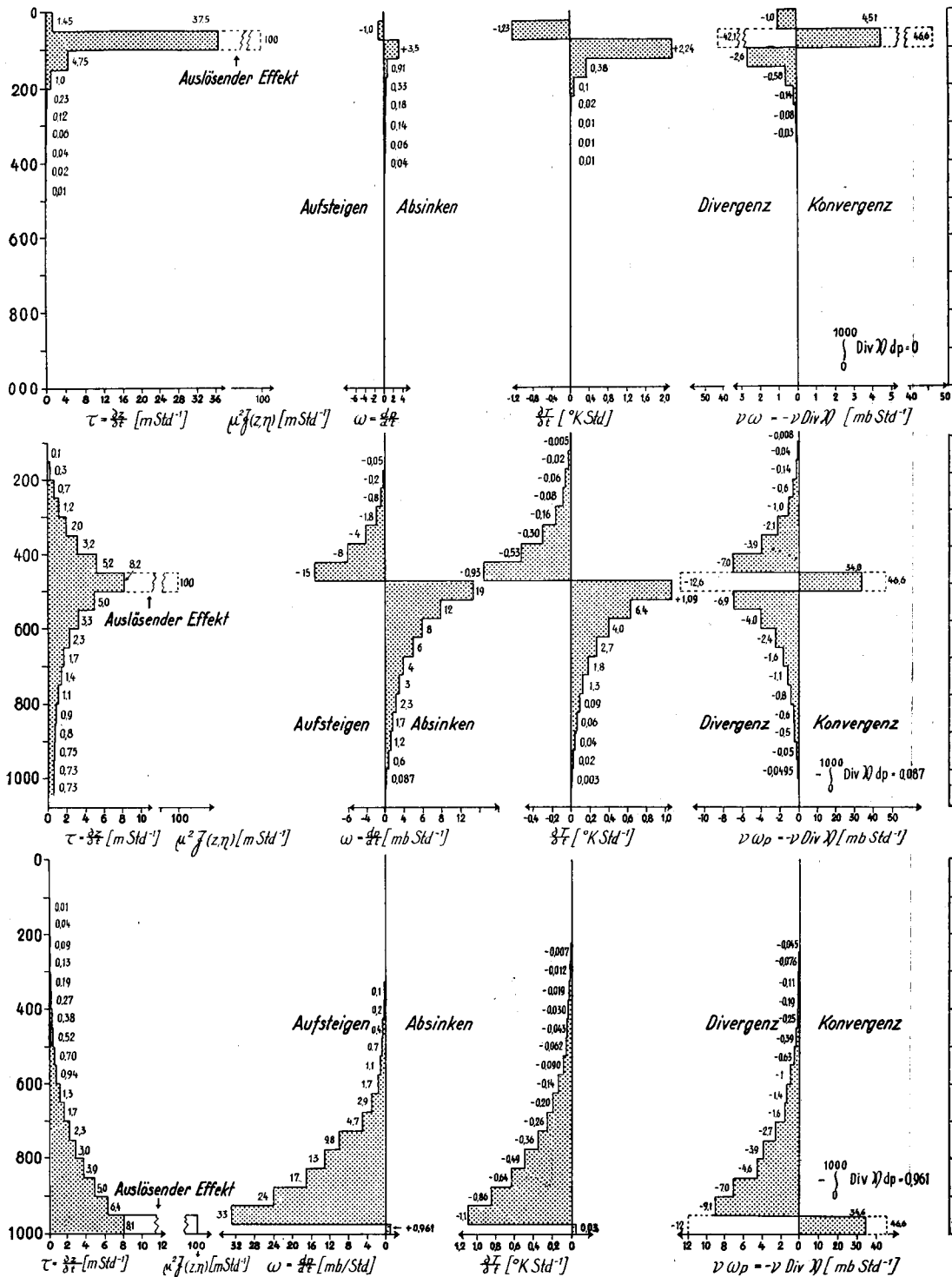


Fig. 20.

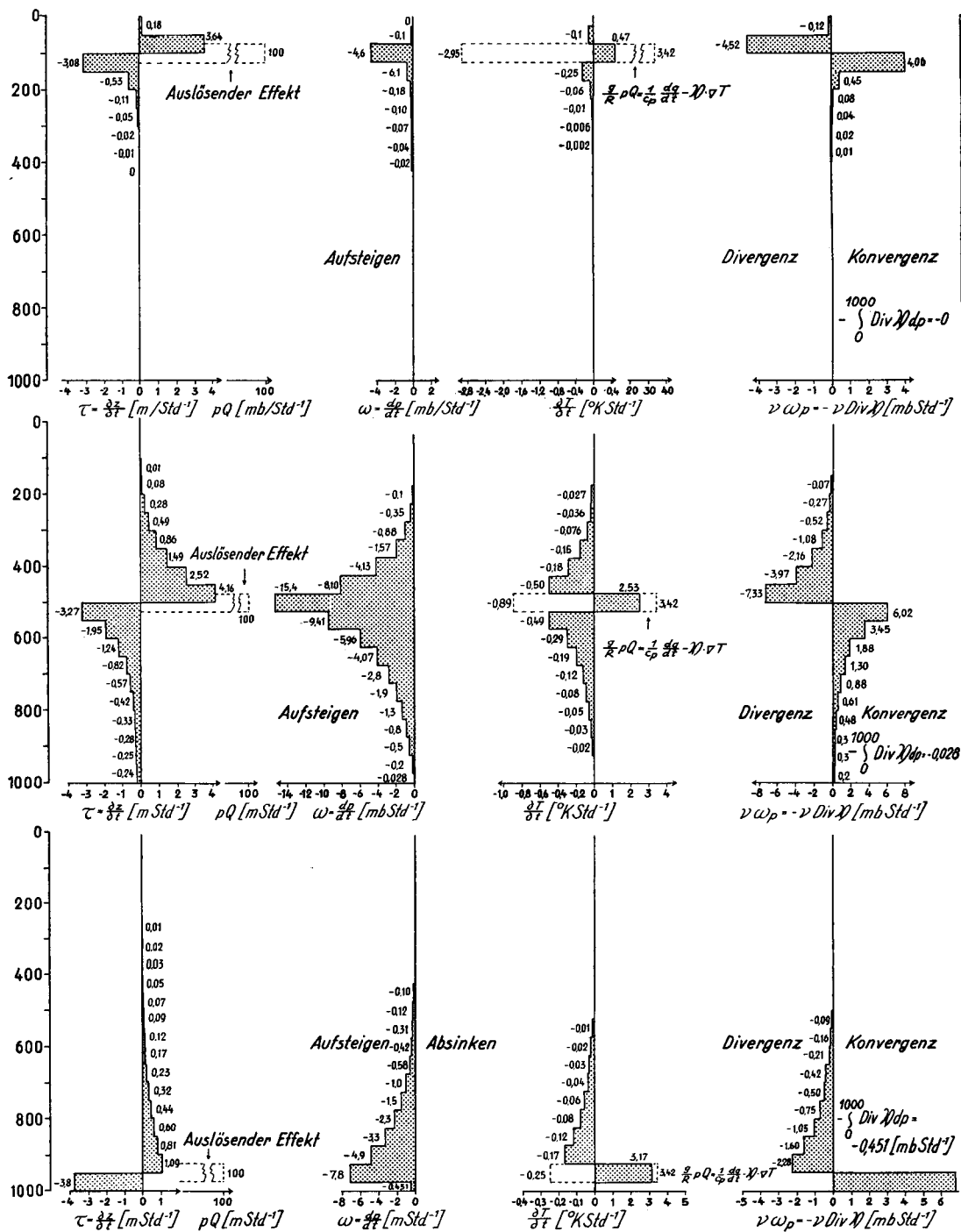


Fig. 21.

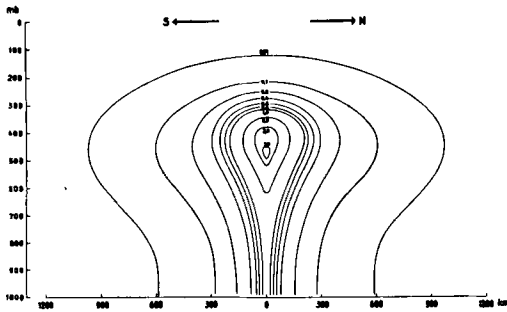


Fig. 22. Einflußfunktion $\tau \left[\frac{\text{dm}}{\text{Std}} \right]$ mit einem nichtverschwindenden Jacobi-Ausdruck $\mu^2 J_{k'}^{t'j'}(z, \eta) = 100 \left[\frac{\text{dm}}{\text{Std}} \right]$ im Störpunkt $\mathbf{r}'$ mit $\varphi' \approx 51^\circ$ Breite und $p' = 475$ mb bei hoher Labilität in der Troposphäre: $T_z = -9^\circ/\text{km}$, $\eta = f$.

positiven Störquelle $J(z, \eta) > 0$ (primäre Konvergenz) entsteht vorerst im Störpunkt selbst eine horizontale Massenkongruenz, die wegen der geringen Kompressibilität der Luft aus Kontinuitätsgründen eine vertikale Massendivergenz erzeugt mit aufsteigender Luft oberhalb und mit absinkender Luft unterhalb des Quellpunktes. Unterhalb des Quellpunktniveaus wird wegen des Massenzufusses im Quellpunkt positive Drucktendenz erzeugt, oberhalb des Quellpunktes infolge der positiven Vertikal-komponente $\frac{dz}{dt} > 0$ ebenfalls eine positive Drucktendenz, d. h. die Niveauflächen heben sich in der gesamten Störpunktsvertikalsäule relativ zur Umgebung an. Diese Anhebung

Fig. 21. Einflußfunktion der Höhentendenz $\tau \left[\frac{\text{m}}{\text{Std}} \right]$, der Vertikalgeschwindigkeit $\omega \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$, der Temperaturänderung $T_t \left[\frac{^\circ\text{K}}{\text{Std}} \right]$ und der horizontalen Massendivergenz $-\nu \text{Div } \mathbf{v} \left[\frac{\text{mb}}{\text{Std}} \right]$ innerhalb der den Störpunkt enthaltenden Vertikalsäule, ausgelöst durch einen nichtverschwindenden thermischen Ausdruck $(pQ)_{k'}^{t'j'} = 100 \left[\frac{\text{m}}{\text{Std}} \right]$, entspricht einem Wert $\left(\frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T \right)_{k'}^{t'j'} = 3,42 \left[\frac{^\circ\text{K}}{\text{Std}} \right]$ im Störpunkt $\mathbf{r}'$ mit $p' \approx 51^\circ$ Breite und $p' = 100$ mb (obere Reihe), 500 mb (mittlere Reihe), 950 mb (untere Reihe).

Tellus V (1953), 4

bewirkt wegen der Trägheit des Windes, der nur mit einer gewissen Verzögerung dem ansteigenden Gradientfeld sich anpassen kann, in allen Niveaus der Quellpunktssäule wegen Überwiegens der Gradientkraft über die Corioliskraft ein Ausströmen, d. h. Divergenzen, die sich mit der primären Konvergenz im Quellpunkt weitgehend kompensieren. Temperaturmäßig gleicht sich das infolge des Aufwindes entstehende Abkühlungsgebiet oberhalb mit dem infolge des Absinkens erzeugten Erwärmungsgebiet unterhalb des Störniveaus (bei stabiler Schicht) in seiner Wirkung auf den Bodendruck ebenfalls weitgehend aus, siehe Fig. 7, 14–16.

Im Falle einer positiven Q -Störquelle findet vorerst infolge der Expansion ein Aufsteigen der Luft mit konvektiver Abkühlung und positiver Tendenz $\tau > 0$ oberhalb des Quellpunktes statt; das mit diesem Druckanstieg verbundene Massendefizit führt zu einem Druckfall unterhalb des Quellpunktniveaus und damit zu Konvergenzen mit aus Kontinuitätsgründen aufsteigenden Komponenten und konvektiver Abkühlung. In der gesamten Vertikalsäule findet demnach konvektive Abkühlung statt, die die primäre Erwärmung im Quellpunkt selbst weitgehend kompensiert. Die ausgelösten Massendivergenzen mit entgegengesetzten Vorzeichen unterhalb und oberhalb des Quellpunktes kompensieren sich gleichfalls weitgehend in ihrer Wirkung auf die Bodendrucktendenz (vgl. Fig. 12, 17–19). Die exakten quantitativen simultanen Vorgänge in der zugrundegelegten Standardatmosphäre zeigen die Fig. 20 und 21 für die betrachtete Störpunktssäule mit p' in Bodennähe, im mittleren Niveau und in der Stratosphäre. Soweit die der Berechnung zugrundeliegenden Gesetzmäßigkeiten (16) die atmosphärischen Vorgänge adäquat beschreiben, muß aus den Lösungsergebnissen geschlossen werden, daß in der Atmosphäre trotz der Annahme quasistatischer Vorgänge und unendlicher Signalgeschwindigkeiten doch ein Nahwirkungsprinzip gültig ist¹.

Das bedeutet, daß in praxi eine Quellpunktstörung im oben definierten Sinne Deformationsfelder der meteorologischen Feldgrößen auslöst, die räumlich rasch mit wachsender Distanz vom Quellpunkt abklingen und daß ande-

¹ Vergleiche dazu die Betrachtung von CHARNEY (1949) über die Gruppen-Geschwindigkeiten mit analogen Ergebnissen.

rerseits die Ursachen für eine beobachtete Deformation in einem bestimmten Punkte ebenfalls in unmittelbarer Umgebung derselben ihren Sitz haben müssen. Man muß natürlich berücksichtigen, daß mit zunehmendem Abstand r vom betrachteten Aufpunkt auch die Anzahl der beitragenden Gitterpunkte mit r^2 anwächst, so daß trotz abnehmenden Einflußgewichts des Einzelpunktes der Einfluß weit entfernter Flächen den Einfluß der Nachbarpunkte überdecken kann.

Jedoch ist zu bedenken, daß mit zunehmender Entfernung auch die Verteilung der inho-

mogenen Terme in zunehmendem Maße auf den Flächen gleichen Einflußgewichts die Form willkürlicher oder zufälliger Belegungen annehmen werden, so daß sich die einzelnen Gitterpunkte der Einflußfläche weitgehend in ihrer Wirkung auf den Lösungswert des Aufpunktes gegenseitig auslöschen.

Für die während des Herbstsemesters 1951 empfangenen wertvollen Anregungen und Ratschläge für die Abfassung der Arbeit sei den Angehörigen des Instituts für Meteorologie, Stockholm, besonders Prof. Rossby, Dr. Eliassen und Dr. Bolin herzlich gedankt.

LITERATURVERZEICHNIS

- BOLIN, B., CHARNEY, J. G., 1951: Numerical tendency computations from the barotropic vorticity equation. *Tellus* **3**, 4, 248—257.
- CHARNEY, J. G., 1948: On the scale of atmospheric motion. *Geof. publ.* **XVII** 2.
- CHARNEY, J. G. 1949: On a physical basis for numerical prediction of largescale motions in the atmosphere. *J. meteor.* **6**, 6, 371—385.
- CHARNEY, J. G., ELIASSEN, A., 1949: A numerical method predicting the perturbations of the middle latitude westerlies. *Tellus* **2**, 38—54.
- CHARNEY, J. G., FJØRTOFT, R., v. NEUMANN, J., 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation. *Tellus* **4**, 237—254.
- CRADDOCK, J. M., 1951: Advective temperature change in the 1000—700 mb and 700—500 mb layers. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.* **77**, 317.
- EADY, E. T., 1952: Note on weather computing and the so-called $2\frac{1}{2}$ -dimensional model. *Tellus* **4**, 3, 157—167.
- ELIASSEN, A., 1948: The quasistatic equations of motion with pressure as independent variable. *Geof. publ.* **XVII**, 3.
- ELIASSEN, A., 1952: Simplified dynamic models of the atmosphere, designed for the purpose of numerical weather prediction. *Tellus* **4**, 3, 145—156.
- FJØRTOFT, R., 1952: On a numerical method of integrating the barotropic vorticity equation. *Tellus* **4**, 3, 179—194.
- HINKELMANN, K., 1951: Der Mechanismus des meteorologischen Lärmes. *Tellus* **3**, 4, 285—296.
- HINKELMANN, K., ESSENWANGER, O., REYMANN, G., WIPPERMANN, F., 1952: Physikalisch-mathematische Grundlagen der numerischen Integration in einer baroklinen Atmosphäre. *Ber. d. Dt. Wetterdienstes i. d. US-Zone Nr.* **38**, 416—428.
- KLEINSCHMIDT, E. jun. 1951: Über Aufbau und Entstehung von Zyklonen, III. Teil. *Met. Rdsch.* **4**, 5/6, 89—96.
- PHILIPPS, H., 1939: Die Abweichung vom geostrophischen Wind. *Meteor. Z.* **56**, 460—483.
- PHILLIPS, N., 1951: A simple three-dimensional model for the study of largescale extratropical flow patterns. *J. Meteor.* **8**, 6, 381—394.
- REGULA, W., 1952: Advective und nichtadvective Vorgänge im Bereich einer Zyklone als Funktion von Raum und Zeit. *Ber. d. Dt. Wd. i. d. US-Zone* **38**, 36—41.
- ROSSBY, C. G. and collaborators 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of the semi-permanent centers of action. *J. Marin. Res.* **2**, 1, 38—55.
- ROSSBY, C. G., 1949: On a mechanism for the release of potential energy in the atmosphere. *J. Meteor.* **6**, 163—180.
- SAWYER J. S., BUSHBY F. H., 1951: Note on the numerical integration of the equations of Meteorological dynamics. *Tellus* **3**, 4, 201—203.
- Staff Members, University of Stockholm 1952: Preliminary report on the prognostic value of barotropic models in the forecasting of 500 mb height changes. *Tellus* **4**, 1; 21—30.
- STÜMKE, H. 1950: Theorie der Weiterentwicklung von stabilen atmosphärischen Druckfeldern. *Met. Rdsch.*, **3**, 241—243; 4, 7—13.
- STÜMKE, H., 1953: Differentialgleichungen der schwingungsfreien Weiterentwicklung von schwachen, mittleren und starken Störungen in der Erdatmosphäre und ähnlichen rotierenden Systemen. i. Druck.
- SUTCLIFFE, R. C., 1947: A contribution to the problem of development. *Quart. J. R. meteor. Soc.* **73**, 370—383.