

Zur numerischen Wettervorhersage mittels Relaxationsmethode unter Einbeziehung barokliner Effekte. I

K. HINKELMANN, Deutscher Wetterdienst, Bad Kissingen.

(Manuscript received January 20, 1953)

Abstract.

Following a publication in Berichten des Deutschen Wetterdienstes No. 38 p. 416 the present paper outlines a method for the approximate solution of the quasistatistical and quasigeostrophical basic equations in an arbitrary baroclinic atmosphere taking into consideration the normal boundary conditions. Certain influence functions are calculated for a standard atmosphere by means of a relaxation method, in these calculations it is assumed that the inhomogeneous term of the differential equation is equal to unity at one grid point and disappears at all the other. The solutions permit us to determine the reaction of the atmosphere to a point source perturbation and calculate its horizontal and vertical range.

Ausgehend von den klassischen Arbeiten von Rossby und seinen Mitarbeitern (1939, 1949) ist im letzten Jahrzehnt erneut der Versuch unternommen worden, durch Verwendung dem tatsächlichen Verhalten der Atmosphäre mehr und mehr angepaßter Modelle die Weiterentwicklung atmosphärischer Felder und den diese Entwicklung einleitenden atmosphärischen Mechanismus mit physikalisch-mathematischen Methoden zu untersuchen.

Die Verwendung idealisierter Modelle hat den Vorteil, daß man sich bei Inangriffnahme eines solch umfangreichen Programms anfänglich auf noch übersehbare Einflüsse beschränken kann, die aber doch die Grundzüge nicht-stationärer Vorgänge enthalten.

Die mit Vorhersagen an Hand einfacher Modelle gewonnenen Erfahrungen erleichtern den Übergang zu komplizierteren Modellen und das schrittweise Verständnis für den Einfluß hinzukommender nicht leicht zu überschender wetterbestimmender Effekte.

Als erstes wurde das barotrope Modell derartigen Vorausberechnungen zugrundegelegt: CHARNEY und ELIASSEN (1949), CHARNEY, FJØRTOFT, VON NEUMANN (1950), BOLIN, CHARNEY (1951), SAWYER, BUSHBY (1951);

Tellus V (1953), 3

Staff members, University of Stockholm (1952). Die Gestalt der Topografien einer barotrop vorausgesetzten Atmosphäre ist unabhängig von der Höhe, so daß man es bei diesem Modell lediglich mit einem zweidimensionalen Problem zu tun hat, wenn die Integration nur über einen infinitesimalen Zeitschritt ausgeführt wird (numerische Integration), die Zeit also in Differentialgleichungen, bei denen zeitliche partielle Ableitungen nur von I. Ordnung auftreten, als unabhängige Koordinate herausfällt, da diese Ableitungen als abhängige Variable betrachtet werden.

Auch in einer baroklinen Atmosphäre zeigt jedoch ein ausgezeichnetes Niveau, das man als äquivalent-barotropes Niveau bezeichnet und das sich weitgehend mit der Fläche verschwindender Divergenzen deckt, ein der barotropen Atmosphäre äquivalentes Verhalten. Dieses Niveau¹ wird in der Nähe der 500-mb-Fläche

¹ Die genauere Definition dieser Fläche ist die Forderung, daß auf ihr $\left(\frac{\omega}{\eta}\right)_p = 0$, Bezeichnung siehe unter I.

Da $\left|\frac{\omega}{\eta}\right|$ an den Grenzen $p = 0$ und der Erdoberfläche ein Minimum $\frac{\omega}{\eta} \approx 0$ aufweist, ist es naheliegend, in

vermutet und Berechnungen mit Hilfe barotroper Gleichungen beziehen sich deshalb auf mittlere Schichten der Atmosphäre.

Bei Verwendung nichtlinearisierter barotroper Differentialgleichungen ist man auf einen numerischen Lösungsprozeß angewiesen, (Lösung der barotropen Vorticity-Gleichung vom Poisson-Typ). Ein graphisches Vorhersageverfahren, das auch im täglichen Vorhersagedienst anwendbar wäre, wurde von R. FJØRTOFT (1952) entwickelt. Die barotrope Atmosphäre ist thermisch inaktiv. Um barokline Effekte und damit die dreidimensionale Struktur der Atmosphäre in die Rechnung wenigstens teilweise einzubeziehen, wurden von N. PHILLIPS (1951), E. T. EADY (1952) und A. ELIASSEN (1952) sogenannte $2\frac{1}{2}$ -dimensionale oder sinngemäßer zweidimensionale Verfahren entwickelt, bei denen jedem Punkt der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit 2 den vertikalen Aufbau der Atmosphäre beschreibende Parameter zugeordnet werden.

Bei dem Advektionsmodell von R. FJØRTOFT (1950) wird in weitgehender Anlehnung an die Untersuchungen von R. C. SUTCLIFFE (1947) zwar das dreidimensionale Anfangsfeld und damit thermische Advektionen berücksichtigt, jedoch der vertikale Transport der potentiellen Temperatur ignoriert, so daß kompensierende Effekte durch Konvektion verlorengehen, wodurch sicherlich der vertikale Einflußbereich einer Störung auf die durch diese ausgelösten Tendenzfelder erheblich erhöht werden dürfte, siehe III.

Die Anwendung vollständigerer Modelle auf Wettersituationen, die das Endziel derartiger quantitativer Betrachtungen nichtstationärer Vorgänge sein muß, erfordert zur Lösung derart umfangreiche Rechenoperationen, daß bisher mit tatsächlichen Wetterentwicklungen vergleichbare Resultate nicht vorliegen. Man hat sich bisher darauf beschränken müssen, die Gesetzmäßigkeiten sinnvoll zu formulieren und Lösungsmöglichkeiten zu erörtern: vgl. u. a. ELIASSEN (1948), CHARNEY (1949), STUMKE (1950, 1953), KLEINSCHMIDT (1951), HINKELMANN, ESSENWANGER, REYMANN, WIPPERMANN (1952).

Alle bisher erwähnten Modellbetrachtungen erfassen lediglich quasistatische Prozesse, das mittleren Niveaus $p \approx 500$ mb einen Extremwert von $\frac{\omega}{\eta}$ und damit $\left(\frac{\omega}{\eta}\right)_p \approx 0$ zu vermuten.

sind Vorgänge, bei denen nahezu Gleichgewicht zwischen den an einem Luftpunkt angreifenden Kräften vorausgesetzt wird.

Sie machen also weitgehend Gebrauch von spezifisch atmosphärischen Gesetzmäßigkeiten — statisches Gleichgewicht, geostrophische Windbeziehung — und verkörpern somit durch die Erfahrung gesicherte Eigenheiten atmosphärischer Zustände. Soweit methodische Fehlerquellen ausgeschlossen werden, muß von den Resultaten deshalb erwartet werden, daß diese die Vielzahl qualitativ gefaßter synoptischer Regeln quantitativ und ihrem physikalischen Gewicht entsprechend zum Ausdruck bringen.

Der Vorzug einer solchen quasistatischen Betrachtungsweise, auf die sich die nachfolgenden Berechnungen beziehen, besteht darin, daß damit allein der synoptisch interessierende Wettertrend nämlich die zeitliche Veränderung gemittelter Zustände, also

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{T} \int_0^{T+t} \psi dt \right)$$

ψ = beliebige meteorologische Eigenschaft,

erfaßt wird, magn. $T = 1$ Std, während der verwickelte zeitliche tatsächliche Ablauf innerhalb einer Zeit T , der stark mit wettermäßig bedeutungslosen Schwingungen durchsetzt ist, außer Betracht gelassen werden kann. Diese Elimination sog. meteorologischer Lärmvorgänge wird bewirkt durch gewisse Verträglichkeitsforderungen für nicht streng gültige Relationen nach einem, von J. G. CHARNEY (1948) angegebenen Verfahren, vgl. auch K. HINKELMANN (1951).

Die Einbeziehung stärker ins Gewicht fallender Beschleunigungen, wie sie kleinräumig und kurzzeitig zweifellos auftreten, erfordert, auf die ursprünglichen Gleichungen der Dynamik zurückzugreifen¹. Numerische Resultate sind damit jedoch erst zu erwarten, wenn schnellrechnende instrumentelle Hilfsmittel zur Verfügung stehen, da zur Sicherung der Konvergenz numerischer Lösungen Zeitschritte in der Größenordnung 10 min verwendet und damit sehr viele numerische Integrationsprozesse durchgeführt werden müssen, um eine Vergleichsmöglichkeit mit den in synoptischen Karten registrierten aktuellen Wetterentwicklung zu erhalten. Leider sind derartige von J. G. Charney

¹ vgl. dazu Fußnote Seite 5.

und I. C. Freeman im Institute for Advanced Study, Princeton durchgeführte Vorausberechnungen bisher nicht veröffentlicht.

Im folgenden wird versucht, einige wenn auch sehr primitive dreidimensionale barokline Vorgänge quantitativ anzugeben, wobei besonders die vertikale Kopplung zwischen den atmosphärischen Niveaus zum Ausdruck kommen soll.

I. Grundgleichungen

Zur einfacheren Formulierung der Gesetzmäßigkeiten benutzen wir künftig durchweg in Übereinstimmung mit der synoptischen Topografiedarstellung ein Koordinatensystem mit p (Luftdruck) als vertikaler Koordinate. Die Höhe z über einer Fläche konstanten Schwere- und Zentrifugalpotentials (z. B. NN) wird dabei als abhängige Koordinate betrachtet. Differentiationen nach horizontalen Koordinaten x_1, x_2 —im allgemeinen werden die geographischen Koordinaten λ, φ verwendet—sind also stets bei festgehaltenem p auszuführen, insbesondere ist der horizontale formale Nablaoperator definiert durch

$$\nabla = \frac{1}{a \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \mathbf{i}_\lambda + \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{i}_\varphi;$$

a = Entfernung vom Erdmittelpunkt ≈ 6370 km.

Eine solche Transformation, bei der p und z ihre Rolle als abhängige und unabhängige Koordinate vertauschen, ist in (1948) von Å. Eliassen durchgeführt worden, wo auch die nachfolgend verwendeten Grundgleichungen abgeleitet sind.

Die Vorticity-Gleichung schreibt sich — bei vernachlässigter Reibung — im p -System:

$$\frac{d\eta}{dt} - \eta \omega_p + \mathbf{i}_r \cdot (\nabla \omega \times \mathbf{v}_p) = 0, \quad \text{mit}$$

$\mathbf{i}_r$ = vertikaler Einheitsvektor, zum Zenit zeigend

f = Coriolisparameter

$\mathbf{v}$ = zweidimensionaler Geschwindigkeitsvektor

$\omega \equiv \frac{dp}{dt}$ = Vertikalgeschwindigkeit im p -System.

$$\frac{d}{dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \omega \frac{\partial}{\partial p}$$

Bei Herleitung der Gleichung wurde von der Konstanz von g sowie der Gültigkeit der statischen Grundgleichung (3) Gebrauch gemacht. Weiterhin wurde der aus dem Coriolisglied resultierende Term $\mathbf{i}_r \cdot (\nabla \times 2\Omega \cos \varphi \mathbf{i}_\lambda)$ sowie die den Faktor $\frac{\omega}{a}$ enthaltenden metrischen

Glieder außer Betracht gelassen.

Bei weit ausgedehnten Feldern ist der Term $\mathbf{i}_r \cdot (\nabla \omega \times \mathbf{v}_p)$ sicherlich um eine Zehnerpotenz kleiner als die beiden verbleibenden Ausdrücke; der einfacheren Rechnung wegen werde deshalb in der Vorticity-Gleichung das gemischte Vektorprodukt gestrichen. Die Mitnahme dieses Ausdrucks bedeutet jedoch keine prinzipielle Schwierigkeit.

Mit dieser Vereinfachung schreibt sich obige Gleichung nach Eulerzerlegung und Zusammenfassung der Glieder $\omega \eta_p - \eta \omega_p$:

$$\eta_t - \eta^2 \left(\frac{\omega}{\eta} \right)_p = -\mathbf{v} \cdot \nabla \eta \quad (1)$$

Den 1. Hauptsatz der Thermodynamik verwenden wir in der Form

$$\frac{d \ln \vartheta}{dt} = \frac{1}{c_p T} \frac{dq}{dt} \quad \text{mit} \quad \vartheta = \text{const} \cdot p^{\frac{1}{\kappa}} \varrho^{-1}; \quad \kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (2)$$

Die Vorticity-Gleichung und der 1. Hauptsatz in der Fassung (1, 2) werden in der quasistatischen Betrachtungsweise nach Charney als verträglich angesehen mit den Gleichgewichtsbedingungen in der Form der

a) statischen Grundgleichung:

$$z_p = -\frac{1}{g\varrho} \quad (3)$$

b) geostrophischen Windbeziehung¹

$$\mathbf{v} = \frac{1}{f} \mathbf{i}_r \times \nabla g z \quad (4)$$

¹ Durch eine Modifikation dieses Gleichgewichtsansatzes für den horizontalen Windvektor mit Hilfe des Philippschen Ansatzes (1939) versucht H. STÜMKE (1953) auch stärkere ageostrophische Windkomponenten z. B. in Frontalzonen in die quasistatische Betrachtungsweise einzubeziehen.

Er setzt anstelle von (4)

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_1 \cdot \Phi - \frac{g}{f^2} \nabla \tau$$

$$\text{mit } \mathbf{v}_1 \equiv \frac{1}{f} \mathbf{i}_r \times \nabla g z; \quad \Phi \equiv \frac{g}{f^2} \nabla \nabla z$$

Für η erhält man aus (4)

$$\eta = \mathbf{i}_r \cdot \left[\nabla \times \left(\frac{g}{f} \mathbf{i}_r \times \nabla z \right) \right] + f \approx \frac{g}{f} \Delta z + f, \text{ worin}$$

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] \quad (4a)$$

(4) und (4a) in (1) eingesetzt ergibt mit der Abkürzung für die Tendenz $\frac{\partial z}{\partial t} = \tau$

$$\Delta \tau - \frac{f}{g} \eta^2 \left(\frac{\omega}{\eta} \right)_p = - \frac{f}{g} \mathbf{v} \cdot \nabla \eta \quad (5)$$

Unter Verwendung der Abkürzungen:

$$s \equiv -(\ln \vartheta)_p; \sigma \equiv -\frac{1}{\varrho} \frac{\partial \ln \vartheta}{\partial p}; \text{ Stabilitätsmaße.}$$

$$Q \equiv \frac{1}{g \varrho} \left(\frac{1}{c_p T} \frac{dq}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla \ln \vartheta \right) = \frac{R}{gp} \left(\frac{1}{c_p} \frac{dq}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla T \right)$$

erhält man für Gl. (2)

$(\ln \vartheta)_t \equiv \omega s = g \varrho Q$. Das ergibt nach ω aufgelöst:

$$\omega = -\frac{g}{\sigma} \left[Q + \frac{1}{g \varrho} (\ln \vartheta)_t \right]$$

worin die beiden letzten Terme als Korrekturglieder betrachtet werden. Vernachlässigt man die geringe Variabilität von f und ebenso Produkte von Korrekturgliedern, erhält man mit diesem erweiterten Windansatz (mit Bezug auf ein cartesisches Koordinatensystem): anstelle (4a)

$$\eta = \eta_1 + \eta_k \text{ mit } \eta_1 \equiv \frac{g}{f} \Delta z + f;$$

$$\eta_k \equiv -\frac{2g^2}{f^3} \mathbf{i}_r \cdot (\nabla z_x \times \nabla z_y)$$

anstelle (5)

$$\tau_{xx} \left(1 - \frac{2g}{f^2} z_{yy} \right) + \tau_{yy} \left(1 - \frac{2g}{f^2} z_{xx} \right) +$$

$$+ \frac{4g}{f^2} \tau_{xy} z_{xy} - \frac{1}{f} \nabla \tau \cdot \nabla \eta_1 - \frac{f}{g} \left\{ \eta_1^2 \left(\frac{\omega}{\eta_1} \right)_p + \right.$$

$$\left. + \eta_k^2 \left(\frac{\omega}{\eta_k} \right)_p \right\} = - \frac{f}{g} \mathbf{v}_1 \cdot \nabla (\eta_1 + \eta_k) + \frac{f}{g} \mathbf{v}_1 \cdot \Phi \cdot \nabla \eta_1$$

anstelle (6)

$$\omega = -\frac{g}{\sigma} \left(\tau_p + Q + \frac{1}{f^2} \nabla \tau \cdot \nabla \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{g} \mathbf{v}_1 \cdot \Phi \cdot \nabla \frac{1}{\varrho} \right)$$

wobei die unterstrichenen Glieder als Korrekturglieder gegenüber Gl. (5–6) auftreten.

und unter Verwendung von (3) und $(\ln \vartheta)_t = \left(\ln \frac{1}{\varrho} \right)_t$

$$\omega = -\frac{g}{\sigma} (\tau_p + Q) \quad (6)$$

Soweit nichtadiabatische Effekte $\frac{dq}{dt}$ außer Betracht gelassen werden oder $\frac{dq}{dt}$ als bekannte Funktion der unabhängigen Variablen angenommen wird, sind alle Ausdrücke in den Gleichungen (5, 6) wegen (3, 4) Funktionen von z und deren Ableitungen nach den räumlichen Koordinaten (innere Ableitungen) mit Ausnahme der Variablen τ, ω , die deshalb als abhängige gesuchte Variable aufgefaßt werden, die Funktion z ist dagegen zu einem bestimmten Zeitpunkt wenigstens prinzipiell in Form von Topographien vorgebar.

Mit $\frac{\eta}{\sigma} > 0$ eine Bedingung, die stets als erfüllt angesehen werden soll, ist das System (5, 6) von elliptischem Typ, es ist also eine Randwertaufgabe zu stellen.

Die Randbedingungen werden geliefert durch die kinematische Forderung, daß durch die Grenzflächen $p = 0$ und die Erdoberfläche $z = z^*$ (x_1, x_2) bzw. $p = p^*$ (x_1, x_2, t) ein Massenfluß nicht stattfindet.

Wegen der Undurchdringlichkeit beider Flächen gilt:

$$\omega|_{p=0} = 0 \quad (7)$$

$\left(\frac{dz}{dt} - \mathbf{v} \cdot \nabla z^* \right) \Big|_{p=p^*} = 0$; $z^* = z|_{p=p^*} =$ = Höhe der Erdoberfläche, bezogen auf eine Geopotentialfläche z. B. NN. (8)

Allgemein sollen Werte an der Fläche z^* künftig mit einem * gekennzeichnet werden.

Setzt man auch in Bodennähe geostrophische Windverhältnisse voraus, so ergibt sich für (8), da $\mathbf{v} \cdot \nabla z = 0$

$$(\tau + \omega z_p - \mathbf{v} \cdot \nabla z^*)|_{p=p^*} = 0 \quad (8a)$$

Da die quasistatischen Gleichungen in Äquatornähe ihre Gültigkeit verlieren, kann die Integration lediglich für ein Teilgebiet der Erde durchgeführt werden, für dessen seitliche Begrenzungsfläche keine physikalische Randbedingung existiert. Für Kurzfristvorhersagen wird jedoch der Einfluß ungenauer Randwerte

mit zunehmender Entfernung vom Rand rasch abklingen, s. Abschn. III, so daß man die Anfangssituation z soweit über das eigentliche Prognosegebiet hinaus vorgeben kann, daß auch geschätzte τ -Werte oder physikalisch nicht begründete Annahmen über das Verhalten von τ an der seitlichen Begrenzungsfläche das Integrationsresultat im Prognosegebiet selbst nur unwesentlich beeinflussen. Man kann etwa durch eine Extrapolation des bis zum Prognosetermin beobachteten Verlaufs von τ zu einer sinnvollen seitlichen Randbedingung gelangen, oder auch durch gröbere Annahmen, z. B.

$$\tau = 0 ; \Delta \tau = 0$$

Für die spätere Lösung ist es zweckmäßig, ein cartesisches Koordinatensystem x, y, p einzuführen. Wir bilden zu diesem Zwecke die Kugelflächen gleichen Geopotentials mittels einer stereographischen Projektion jeweils auf eine Ebene ab, s. Fig. 1. Vorübergehend sollen Größen, die sich auf Kugelflächen beziehen, mit dem Index K , solche, die sich auf die Ebenen beziehen, mit dem Index E bezeichnet werden.

Die Erdkugel werde vom Südpol (S) her auf die Ebene des Breitenkreises φ_0 projiziert. Der Punkt P^K gehe dabei in den Punkt P^E der Ebene über.

Wir wählen auf der Kugelfläche geographische Lagekoordinaten λ, φ , auf der Ebene Polarkoordinaten α, r , deren Ursprung der Durchstoßpunkt der Erdachse sein möge.

Dann ist $\alpha = \lambda$. Bekanntlich ist diese Abbildung winkeltreu, es gilt also nur das von Punkt zu Punkt veränderliche Maßstabsverhältnis m der Abbildung zu bestimmen.

Der Fig. 1 entnimmt man:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{r}{c} \text{ mit } \gamma = \frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}; \quad c = a (1 + \sin \varphi_0) \quad \text{und}$$

$$m = - \frac{dr}{ad\varphi}$$

$$\begin{aligned} \text{Nun ist } \frac{dr}{d\varphi} &= -\frac{c}{2 \cos^2 \gamma} = -\frac{c}{2} (1 + \tan^2 \gamma) = \\ &= -\frac{c}{2} \left(1 + \frac{r^2}{c^2} \right) \end{aligned}$$

Damit wird: $m = \frac{1}{2} \frac{1}{ac} (c^2 + r^2)$

Der Zusammenhang zwischen r und φ wird vermittelt durch

Tellus V (1953), 3

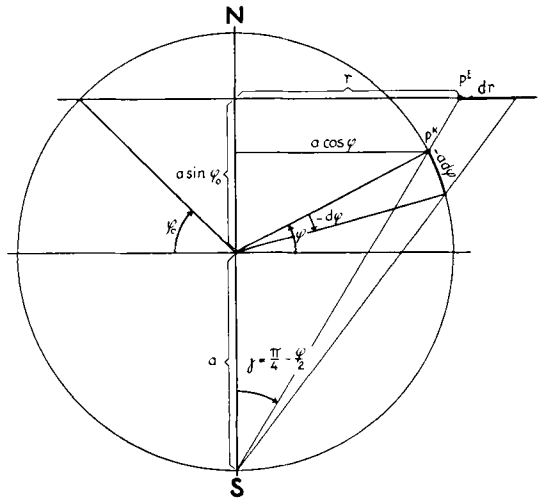


Fig. 1. Stereografische Abbildung.

$$r = c \cdot \operatorname{tg} \gamma \text{ bzw. } \varphi = \frac{\pi}{2} - 2 \arctg \frac{r}{c}$$

Einfache Umformung unter Verwendung der Additionstheoreme ergibt

$$a \cos \varphi = \frac{r}{m}$$

Die vertikale Koordinate p tragen wir dann im Verhältnis 1:1 über der Projektionsebene auf. Jeder horizontalen Lagenänderung dl auf der Kugelfläche entspricht dagegen eine Lagenänderung mdl im transformierten System. So gilt beispielsweise für die Absolutbeträge der wahren Geschwindigkeit $\mathbf{v}^K$ und der Bildpunktgeschwindigkeit $\mathbf{v}^E$:

$$|\mathbf{v}^E| = m |\mathbf{v}^K| \quad \text{und ebenso} \quad |\nabla^E| = \frac{1}{m} |\nabla^K|$$

Für eine skalare Größe ψ gilt nämlich:

$$d\psi = \psi_\varphi d\varphi + \psi_\lambda d\lambda = \psi_r dr + \psi_\alpha d\alpha.$$

Wegen $d\lambda = d\alpha$ gilt $\frac{\partial}{\partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \alpha}$ und wegen $m =$

$$-\frac{dr}{ad\varphi} \text{ gilt } \frac{\partial}{\partial \varphi} = -am \frac{\partial}{\partial r}$$

Mit diesen Transformationsbeziehungen ergibt sich für Δ

¹ Man zeigt mit dieser Beziehung sofort, dass auch $\frac{rd\alpha}{a \cos \varphi d\lambda} = m$ ist.

$$\begin{aligned}\Delta^K &= \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \left[\frac{1}{\cos \varphi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \right) \right] = \\ &= \frac{m^2}{r} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \right] = \\ &= m^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) = m^2 \Delta^E\end{aligned}$$

Für den später einzuführenden Jacobioperator

$$J(\dots) = \frac{1}{D} \frac{\partial(\dots)}{\partial(x_1, x_2)} = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{vmatrix};$$

$D = \text{Funktionaldeterminante} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x_1, x_2)}$ gilt:

$$\begin{aligned}J^K &= \frac{1}{a^2 \cos \varphi} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} & \frac{\partial}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \frac{m^2}{r} \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \alpha} \end{vmatrix} = \\ &= m^2 \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{vmatrix} = m^2 J^E\end{aligned}$$

Weiterhin folgt aus dem bisherigen:

$$\nabla^E \cdot \nabla^E = \nabla^K \cdot \nabla^K$$

$$\nabla^E = m^2 \frac{g}{f} \mathbf{k} \times \nabla^E z$$

$$\nabla^K \cdot \nabla^K = \frac{g}{f} J^K(z, \dots) = \frac{m^2 g}{f} J^E(z, \dots)$$

Für den häufig auftretenden Coriolisparameter f erhält man:

$$f = 2\Omega \frac{c^2 - r^2}{c^2 + r^2};$$

$\Omega = \text{Winkelgeschwindigkeit der Erde.}$

Gleichzeitig sollen die Differentialquotienten der abhängigen Variablen τ und ω durch entsprechende Differenzenquotienten ersetzt werden. Wir führen dafür ein rechteckiges Raumgitter ein mit der horizontalen Maschenweite

$$\begin{aligned}\Delta x = \Delta y &\equiv \mu \text{ und der vertikalen Maschenweite} \\ \Delta p &\equiv \nu\end{aligned} \quad (10)$$

wenn man sich noch anstelle der bei der Transformation benutzten Polarkoordinaten α, r kartesische Koordinaten x, y eingeführt denkt.

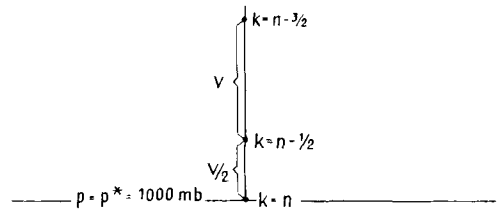
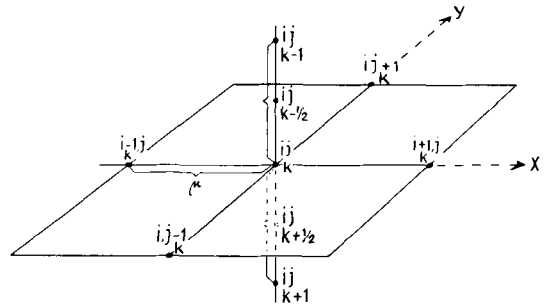
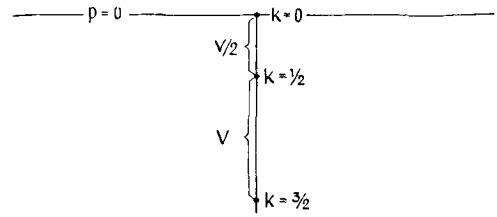


Fig. 2. Anordnung der Gitterpunkte.

Das Raumgitter enthält endlich viele Gitterpunkte

$x = i\mu; y = j\mu; p = kv; i, j, = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$
 $k = 0, 1, 2 \dots$, wenn wir mit $k=0$ $p=0$ identifizieren.

Später werden auch Gitterzwischenpunkte $k = +1/2, 2/3, \dots$ betrachtet.

Die auf den Randflächen liegenden Gitterpunkte sollen als Randpunkte, die übrigen Punkte als Innenpunkte bezeichnet werden.

Anstelle der stetigen Funktionen $\psi(x, y, p)$ sollen im folgenden Gitterfunktionen betrachtet werden, die lediglich an den Gitterpunkten $\mathbf{r}_k^H \{x = i\mu; y = j\mu; p = kv\}$ definiert sind und mit ψ_k^H bezeichnet werden mögen (siehe Fig. 2)

Zur Vereinfachung der Schreibweise wollen wir jedoch anmerken, daß sich Größen ohne Indices stets auf den betrachteten Aufpunkt $\mathbf{r}_k^H$ beziehen mögen, wenn Verwechslungen ausgeschlossen sind. Unter Verwendung der Trans-

formationsbeziehungen für Δ^k und J^k erhält man dann anstelle von (5—8)

$$4 \tau_k - \sum \tau_k^{i,j'} + \frac{\eta_k^2 f \mu^2}{g m^2 \nu} \left[\left(\frac{\omega}{\eta} \right)_{k+\frac{1}{2}} - \left(\frac{\omega}{\eta} \right)_{k-\frac{1}{2}} \right] = \mu^2 J_k^E(z, \eta) \quad (11)$$

$$\omega_k = -\frac{g}{\nu \sigma_k} (\tau_{k+\frac{1}{2}} - \tau_{k-\frac{1}{2}} + \nu Q_k) \quad (12)$$

$$\omega|_{p=0} = 0 \quad (13)$$

$$\left(\tau - \frac{1}{gQ} \omega - M \right) \Big|_{p=p^*} = 0 \quad (14)$$

mit $\sum \psi_k^{i,j'} = \psi_k^{i+1,j} + \psi_k^{i-1,j} + \psi_k^{i,j+1} + \psi_k^{i,j-1}$

$$M = \frac{g m^2}{f} J^E(z, z^*) \Big|_{p=p^*}$$

Wir wollen fürs erste die Erdoberfläche mit der 1000 mb-Fläche identifizieren, so daß $\psi^* = \psi_n$; $n = \frac{1000 \text{ mb}}{\nu}$. Die dann auf ihr gültige Beziehung (14) formen wir mittels des 1. Hauptsatzes noch etwas um:

Wir ersetzen in (6) die Ableitung $(\tau_p)_n$ durch deren hinteren Differenzenquotienten $\frac{\tau_n - \tau_{n-\frac{1}{2}}}{\frac{\nu}{2}}$

und erhalten an der Fläche $p = n\nu = 1000 \text{ mb}$:

$$\omega_n = -\frac{2g}{\nu \sigma_n} \left(\tau_n - \tau_{n-\frac{1}{2}} + \frac{\nu Q_n}{2} \right)$$

Kombination mit (14) in der Formulierung $\tau_n = \frac{1}{gQ_n} \omega_n + M$; $\omega_n = gQ_n (\tau_n - M)$ ergibt mit der Definition $\rho\sigma \equiv s$

$$\omega_n \left(1 + \frac{\nu s_n}{2} \right) = gQ_n \left(\tau_{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu Q_n}{2} - M \right) \text{ bzw.} \quad (15a)$$

$$\tau_n \left(1 + \frac{\nu s_n}{2} \right) = \tau_{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu Q_n}{2} + \frac{\nu s_n}{2} M \quad (15b)$$

Eine Größenordnungsabschätzung ergibt, daß in praxi stets $\frac{\nu s_n}{2} \ll 1$, so daß mit ausreichender Genauigkeit

$$\left(1 + \frac{\nu s_n}{2} \right) \approx 1 \text{ gesetzt werden kann.} \quad (15c)$$

Der Fehler wird umso kleiner, je labiler die bodennahe Schichtung ist. Wir wollen aus (11)

Tellus V (1953), 3

17—302168

und (12) noch die Variable ω eliminieren und die Flächen $p = \text{const}$, für deren Gitterpunkte die resultierenden Gleichungen aufgestellt werden, so wählen, daß ihr gegenseitiger Abstand ν , der Abstand von den Grenzflächen $p = 0$ und $p = 1000 \text{ mb}$ jedoch $\nu/2$ beträgt.

Für $k = 1 + \frac{1}{2}, 2 + \frac{1}{2}, 3 + \frac{1}{2} \dots n - \frac{3}{2}$ erhalten wir durch Elimination von ω aus (11) und (12)

$$(4 + \alpha_{k+} + \alpha_{k-}) \tau_k - \sum \tau_k^{i,j'} - \alpha_{k+} \tau_{k+1} - \alpha_{k-} \tau_{k-1} = \mu^2 J_k^E(z, \eta) + \nu (\alpha_{k+} Q_{k+\frac{1}{2}} - \alpha_{k-} Q_{k-\frac{1}{2}}) \equiv h_k \quad (16a)$$

$$\text{mit } \alpha_{k\pm} = \frac{f \eta_k^2 \mu^2}{m^2 \nu^2} \frac{1}{(\sigma \eta)_{k\pm\frac{1}{2}}}; \quad 1 < k < n - 1$$

Wegen $\omega|_{p=k=0} = 0$ erhält man für die Fläche $p = \nu/2$; $k = \frac{1}{2}$

$$(4 + \alpha_{k+}) \tau_k - \sum \tau_k^{i,j'} - \alpha_{k+} \tau_{k+1} = \mu^2 J_k^E(z, \eta) + \nu \alpha_{k+} Q_{k+\frac{1}{2}} \equiv h_k \quad (16b)$$

Wegen (15a—c) erhält man für die Fläche $p = 1000 - \nu/2$; $k = n - \frac{1}{2}$

$$(4 + \alpha_n + \alpha_{n-}) \tau_k - \sum \tau_k^{i,j'} - \alpha_{n-} \tau_{n-1} = \mu^2 J_k^E(z, \eta) + \alpha_n M + \nu \left(\frac{\alpha_n}{2} Q_n - \alpha_{n-} Q_{n-\frac{1}{2}} \right) \equiv h_k \quad (16c)$$

$$\text{mit } \alpha_n = \frac{f \eta_{n-\frac{1}{2}}^2 \mu^2}{m^2 \nu} \frac{Q_n}{\eta_n}$$

Wählt man $\nu = 1000 \text{ mb}$, so geht 16 (a—c) mit $\omega_n = 0$ über in die Differenzengleichung der barotropen Vorticitygleichung

$$4 \tau_k - \sum \tau_k^{i,j'} = \mu^2 J_k^E(z, \eta), \text{ definiert für } p = 500 \text{ mb;} \quad (16')$$

Mit $\nu = 500 \text{ mb}$ erhält man entsprechend ein Zweiflächenmodell ($k = \frac{1}{2}, k = \frac{3}{2} = n - \frac{1}{2}$) mit 2 gekoppelten Gleichungen in den Aufpunktsflächen $p = 750, 250 \text{ mb}$, das weitgehend mit den sogenannten $2\frac{1}{2}$ -dimensionalen Modellen nach N. Philipps, E. T. Eady und A. Eliassen übereinstimmt:

Eady benützt die Vorticity-Gleichung in der vereinfachten Form:

$$\eta_t - f \omega_p = -\mathbf{v} \cdot \nabla \eta$$

mit $\nabla f \approx 0$

Das ergibt mit $\nu = 500$ mb und ω ($p = 1000$ mb) = 0 folgende zwei Gleichungen — die Zahlenindices kennzeichnen die Niveauflächen —:

$$(\eta_{750})_t + \frac{f}{\nu} \omega_{500} = -\mathbf{v}_{750} \cdot \nabla \eta_{750}$$

$$(\eta_{250})_t - \frac{f}{\nu} \omega_{500} = -\mathbf{v}_{250} \cdot \nabla \eta_{250}$$

, in welche man sich mit (4) und (4a) anstelle von $\mathbf{v}$ und η die Variablen z_{250} und z_{750} eingeführt denke.

Mit den neuen Variablen

$$\Psi = \frac{g}{f} \cdot \frac{1}{2} (z_{250} + z_{750}); \quad \frac{g}{f} z_{750} = \Psi - \frac{1}{2} \Phi$$

$$\Phi = \frac{g}{f} \cdot (z_{250} - z_{750}); \quad \frac{g}{f} z_{250} = \Psi + \frac{1}{2} \Phi$$

ergibt eine Addition obiger 2 Gleichungen:

$$\Delta \Psi_t = -J(\Psi, \Delta \Psi + f) - \frac{1}{4} J(\Phi, \Delta \Phi) \quad (16'')$$

und entsprechend eine Subtraktion:

$$-\Delta \Phi_t + \frac{2f}{\nu} \omega_{500} = J(\Psi, \Delta \Phi) + J(\Phi, \Delta \Psi + f)$$

Elimination von ω_{500} geschieht mittels des I. Hauptsatzes (6) unter Vernachlässigung von $\frac{dq}{dt}$:

$$\omega_{500} = -\frac{g}{\sigma_{500}} (\tau_p + \mathbf{v} \cdot \nabla z_p)_{500}$$

Wir ersetzen hier die Differentialquotienten durch Differenzenquotienten und $\mathbf{v}_{500}$ durch $\frac{1}{2} (\mathbf{v}_{250} + \mathbf{v}_{750}) = \mathbf{i}_r \times \nabla \Psi$ und erhalten:

$$\omega_{500} = -\frac{f}{\nu \sigma_{500}} [\Phi_t + J(\Psi, \Phi)]$$

Nach Einführung dieses Wertes für ω_{500} ergibt die Subtraktionsgleichung schließlich:

$$\left(\frac{2f^2}{\nu^2 \sigma_{500}} - \Delta \right) \Phi_t = J(\Phi, \Delta \Psi + f) + J(\Psi, \Delta \Phi) - \frac{2f^2}{\nu^2 \sigma_{500}} J(\Psi, \Phi) \quad (16''')$$

In dieser einfachen Form ist also eine Separation der beiden abhängigen Variablen durchführbar, so daß lediglich zwei zweidimensionale Diff. Gln. zu lösen verbleiben. Gl. 16'' und 16''' stimmen im wesentlichen mit den entsprechenden Gln. (15 und 17) von E. T. EADY (1952) überein.

Eine Abzählung bestätigt, daß durch (16) zusammen mit den seitlichen Randbedingungen ebensoviele Gleichungen, nämlich für die inneren Gitterpunkte, gebildet werden können wie Unbekannte, nämlich die τ -Werte der inneren Gitterpunkte, darin auftreten. Die Lösung des algebraischen linearen Gleichungssystems (16) liefert eine Approximation der Lösung des Differentialgleichungssystems (5–8). Liegt eine Lösung für τ an den inneren Gitterpunkten vor, so findet man die τ -Werte an der Randfläche $p = p^*$, sowie die weiteren meteorologischen Gitterfunktionswerte durch einfache Differenzenprozesse unter Verwendung der Relationen, die zur Reduktion der hydro- und thermodynamischen Gleichung auf das System (16) herangezogen worden sind, z. B.

$$\omega_k = -\frac{g}{\nu \sigma_k} (\tau_{k+\frac{1}{2}} - \tau_{k-\frac{1}{2}} + \nu Q_k)$$

$$\omega_n = g \varrho_n \left(\tau_{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu Q_n}{2} - M \right)$$

$$\tau_n = \tau_{n-\frac{1}{2}} - \frac{\nu Q_n}{2} + \frac{\nu s_n}{2} M \quad (17)$$

$$\frac{R}{p_k} (T_t)_k = \left(\frac{\partial \frac{1}{\theta}}{\partial t} \right)_k = \frac{g}{\nu} (\tau_{k-\frac{1}{2}} - \tau_{k+\frac{1}{2}})$$

$$(\text{Div } \mathbf{v})_k = \frac{1}{\nu} (\omega_{k-\frac{1}{2}} - \omega_{k+\frac{1}{2}})$$

Integrale Beziehungen, wie sie z. B. die Tendenzgleichung¹, die man durch Integration von (1) zwischen den Grenzen $p = 0$ und $p = p^* = 1000$ mb unter Verwendung von (13, 14, 4') erhält, zum Ausdruck bringt:

$$\tau_n = \frac{1}{g \varrho_n} \omega_n + M = \frac{1}{g \varrho_n} \int_0^{p=1000} \frac{d \ln \eta}{dt} d\tau + M =$$

$$= \frac{m^2}{f \varrho_n} \int_0^{p=1000} \frac{1}{\eta} (\Delta \tau + J(z, \eta) + \omega \Delta z_p) d\tau + M$$

¹ Künftig wird der Index E wieder fortgelassen, da alle Operationen sich auf das projizierte Ebenensystem beziehen sollen.

werden durch die Lösung automatisch befriedigt und können deshalb zur summarischen Kontrolle der Richtigkeit bzw. Genauigkeit eines gewonnenen Näherungslösungsergebnisses benutzt werden.

Soll berücksichtigt werden, daß die Fläche p^* , die bisher mit der 1000 mb-Fläche zusammenfallend angenommen wird, von x und y abhängt, so hat man für deren Randnachbarnpunkte eine variable Maschenweite $\nu(x, y)$ einzuführen und die Koeffizienten in (16c) modifizieren sich entsprechend. Wir wollen annehmen, daß p^* für einen bestimmten Gitterpunkt i, j zwischen den Punkten $k^* \nu < p^* < (k^* + 1) \nu$ liege, dann sei $\nu^* = p^* - k^* \nu$, siehe Fig. 3.

Im Punkte $p = k^* \nu$ gilt näherungsweise:

$$4 \tau_{k^*} - \sum \tau_{k^*}'' + \frac{f \eta_{k^*}^2 \mu^2}{m^2 g} \frac{1}{l \nu} \left[\left(\frac{\omega}{\eta} \right)^* - \left(\frac{\omega}{\eta} \right)_{k^* - \frac{1}{2}} \right] =$$

$$= \mu^2 J_{k^*}(z, \eta) \text{ mit}$$

$$l(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{\nu^*}{\nu} = \frac{1}{\nu} \left(p^* - k^* \nu + \frac{1}{2} \nu \right)$$

Anstelle von (15) erhält man

$$\omega^* = g Q^* (\tau_{k^*} - \nu^* Q^* - M)$$

$$\tau^* = \tau_{k^*} - \nu^* Q^* + \frac{1}{2} \nu^* M$$

und damit anstelle von (16c)

$$\left(4 + \frac{\alpha^*}{l} + \frac{\alpha_{k^*-1}}{l} \right) \tau_{k^*} - \sum \tau_{k^*}'' - \frac{\alpha_{k^*-1}}{l} \tau_{k^*-1} =$$

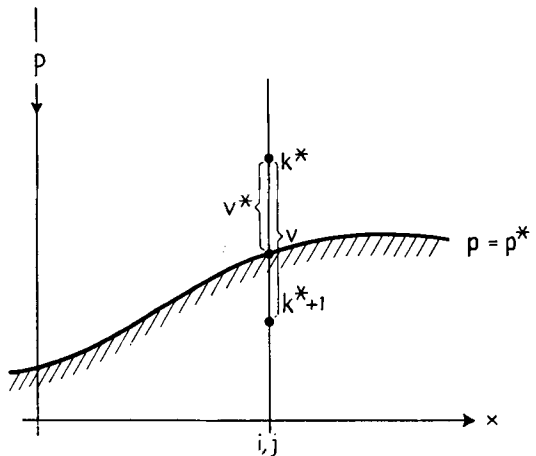


Fig. 3. Variable Maschenweite bei unebener Erdoberfläche.

$$= \mu^2 J_{k^*}(z, \eta) + \frac{\alpha^*}{l} M + \frac{1}{l} (\nu^* \alpha^* Q^* - \nu \alpha_{k^*-1} Q_{k^*-1})$$

$$\text{mit } \alpha^* = \frac{f \eta_{k^*} \mu^2 Q^*}{m^2 \nu \eta^*}$$

Zur Einführung von $\nu^*(x, y)$ bzw. $l(x, y)$ ist die Kenntnis des unreduzierten Bodendrucks $p^*(x, y)$ am Erboden $z^*(x, y)$ erforderlich. Jedoch wird man die Funktion $p^*(x, y)$ in erster Näherung unabhängig von der Zeit ansetzen können. Im folgenden soll also weiterhin von der Approximation $p^* \approx p_n = 1000 \text{ mb}$ Gebrauch gemacht werden.

To be continued in the next issue of this journal.