

Ueber die Genauigkeit verschiedener Approximationen der horizontalen Windkomponenten

Von G. HOLLMANN, Deutscher Wetterdienst in Hamburg,
und H. REUTER, Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien¹

(Manuscript received December 13, 1952)

Abstract

After a brief theoretical discussion of different approximations of the horizontal windcomponents the accuracy of these approximations is proved with the aid of simple but exact solutions of the hydrodynamic equations. In addition to the generally applied geostrophic approximation a second geostrophic approximation proposed by H. PHILIPPS and a stationary approximation suggested by C. G. ROSSBY is dealt with. The theoretical models show that the improvement of higher approximations than the geostrophic depends essentially on the pressure distribution. Moreover the statement is derived that in case of stationary nondivergent motion the ageostrophic windcomponents are perpendicular to the isogons, i.e., the lines of equal α , where $\operatorname{tg} \alpha = v/u$, and directed to areas of lower values of the angle α .

1. Einleitung

Zur Ueberwindung der analytischen Schwierigkeiten, die einer Integration der atmosphärischen Gleichungen entgegenstehen, werden zur Zeit zwei verschiedene Wege eingeschlagen:

- a) Linearisierung der Grundgleichungen
- b) Sukzessive Approximation der Geschwindigkeiten.

Die von V. BJERKNES in die dynamische Meteorologie eingeführte Methode der Linearisierung der Grundgleichungen untersucht Störungen eines bekannten Grundzustandes, der, da er selbst den nichtlinearen Gleichungen genügen muss, nur stark vereinfacht angenommen werden kann. Praktisch ist man kaum über stationäre Grundzustände mit konstanter oder linearer Geschwindigkeits-

verteilung hinausgekommen und hat damit notwendigerweise die Methode der Linearisierung auf sehr spezielle Felder beschränken müssen. Eine weitere Schwierigkeit entsteht dadurch, dass mit der Linearisierung der Grundgleichungen ein grosser Teil synoptisch geschener zweitrangiger Bewegungen (Schall-, Trägheits- und Gravitationswellen) erfasst wird, wodurch sich die Integration unnötig kompliziert und die synoptisch wichtigen Bewegungen u. U. unterdrückt werden.

Um diesen sogenannten "meteorologischen Lärm" (J. G. CHARNEY 1948 und K. HINKELMANN 1951) aus den Bewegungsgleichungen zu eliminieren und gleichzeitig allgemeinere Felder zu erfassen, bedient man sich in neuerer Zeit der Methode der sukzessiven Approximation der horizontalen Geschwindigkeiten, das heisst man versucht die in den Eulerschen Gleichungen auftretenden nichtlinearen Terme durch höhere Ableitungen des Druckfeldes darzustellen. Der geostrophische Wind liefert

¹ Die Arbeit wurde von den Autoren während eines dreimonatigen Aufenthaltes am meteorologischen Institut der Universität Stockholm (Vorstand Prof. C. G. ROSSBY) durchgeführt.

zwar erfahrungsgemäss eine gute Annäherung des Bewegungszustandes, versagt jedoch bei Anwendung auf die Kontinuitätsgleichung. Bekanntlich verschwindet die Divergenz der geostrophischen Impulsdichte — von der Breitenabhängigkeit des Coriolisparameter abgesehen — so dass keine Bodendruckänderungen zu erklären sind.

Um diesen Mangel zu beheben, machte man sich die Erfahrungstatsache zunutze, dass zwar Abweichungen vom geostrophischen Wind vorhanden und zu fordern sind, diese Abweichungen jedoch im Verhältnis zum geostrophischen Wind selbst recht klein sind. Man kann also die geostrophischen Gleichungen als eine erste Näherungslösung der hydrodynamischen Gleichungen ansehen. Zwecks Gewinnung einer weiteren Näherung ersetzt man wie bei einer Iteration die in den Beschleunigungsgliedern auftretenden Geschwindigkeitsterme durch den geostrophischen Wind selbst. Die so erhaltene zweite Näherung kann dann abermals zu einer weiteren Näherung verwendet werden. Wie zuerst von H. PHILIPPS (1939) gezeigt wurde, konvergiert ein solches Verfahren in vielen Fällen ziemlich rasch, so dass bereits die zweite Näherung eine für zahlreiche Zwecke brauchbare Approximation liefert.

Die im barotropen Modell für die numerische Vorhersage der 500 mb Fläche heute verwendete divergenzfreie Vorticity-Gleichung wird durch den geostrophischen Wind selbst angenähert, was soviel bedeutet, dass die aus der ersten Philipps'schen Näherung — wie später noch gezeigt werden wird — zu berechnende Divergenz gleich Null gesetzt wird.

Die von C. G. ROSSBY (1939) eingeführte und von H. ERTEL (1941) geostrophisch approximierte Vorticity-Gleichung hat sich bei der Berechnung von Tendenzfeldern an Hand aktueller Wetterlagen sehr bewährt (CHARNEY, FJØRTOFT, v. NEUMANN 1950; BOLIN-CHARNEY, 1951; STAFF MEMBERS, UNIVERSITY OF STOCKHOLM, 1952).

Obwohl die Konzeption der Erhaltung der absoluten Vorticity die in der baroklinen Atmosphäre auftretenden Entwicklungen ausschliesst, erhebt sich die Frage, in welchem Ausmass Diskrepanzen zwischen berechneten und beobachteten Tendenzen auf die Baroklinität oder mangelhafte Analyse oder die unzureichende Approximation zurückzuführen

sind. Deswegen scheint es uns angebracht zu sein, an Hand einiger einfacher aber exakter Lösungen der hydrodynamischen Gleichungen, die Genauigkeit verschiedener Approximationen zu untersuchen.

2. Diskussion verschiedener Approximationen

Die Horizontalkomponenten der Bewegungsgleichungen schreiben sich in den unabhängigen Variablen (x, y, p, t) bei Vernachlässigung der generalisierten Vertikalgeschwindigkeit dp/dt folgendermassen:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} - fv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + fu &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{aligned}\quad (1)$$

mit den üblichen Symbolen für die Geschwindigkeitskomponenten (u, v), für das Geopotential Φ und den Coriolisparameter f . Die x -Achse ist gegen E , die y -Achse gegen N gerichtet; p bedeutet den Druck, t die Zeit.

Eine Integration von (1) bei bekanntem Geopotential Φ gelingt nur in vereinzelten Fällen. Doch haben diese speziellen Fälle den Vorteil, dass man die exakten Geschwindigkeiten mit den verschiedenen approximativen Geschwindigkeiten vergleichen kann und zwar hinsichtlich der Absolutbeträge und bezüglich der Wirbel- und Divergenzeigenschaften. Bekanntlich bestimmen Wirbel ζ und Divergenz D , durch

$$\zeta = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}, \quad D = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\quad (2)$$

definiert, die Geschwindigkeiten, nämlich durch die aus (2) folgenden Poissonschen Gleichungen

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{\partial D}{\partial x} - \frac{\partial \zeta}{\partial y} \\ \nabla^2 v &= \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial x}\end{aligned}\quad (3)$$

Die einfachste Approximation ist offenbar die geostrophische

$$\begin{aligned} u_g &= -\frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \\ v_g &= \frac{1}{f} \frac{\partial \Phi}{\partial x}. \end{aligned} \quad (4)$$

Sie versagt naturgemäss bei der Divergenzbildung und in der aus (1) folgenden Energiegleichung

$$\frac{dK}{dt} = -\mathbf{v} \cdot \nabla \Phi \quad (5)$$

$$\text{mit } K = \frac{u^2 + v^2}{2}.$$

Jedoch liefert sie in erster Näherung die Wirbelverteilung gemäss

$$\zeta_g = \frac{1}{f} \nabla^2 \Phi. \quad (6)$$

(Die Breitenabhängigkeit von f lassen wir einstweilen unbeachtet.)

Eine von H. PHILIPPS (1939) entwickelte Methode zur Verbesserung dieser Approximation besagt im wesentlichen, dass man die Terme der Eulerschen Beschleunigungen in (1) geostrophisch annähert, so dass sich

$$\begin{aligned} u_1 &= u_g \left(1 - \frac{\zeta_g}{f}\right) - \frac{1}{f} \frac{\partial K_g}{\partial y} - \frac{1}{f} \frac{\partial v_g}{\partial t} \\ v_1 &= v_g \left(1 - \frac{\zeta_g}{f}\right) + \frac{1}{f} \frac{\partial K_g}{\partial x} + \frac{1}{f} \frac{\partial u_g}{\partial t} \end{aligned} \quad (7)$$

ergibt. Die Divergenz verschwindet jetzt nicht mehr identisch wie im geostrophischen Fall. Das Philipps'sche Verfahren kann naturgemäss beliebig oft wiederholt werden. Die Konvergenz der sich ergebenden Reihe ist gewährleistet, sofern

$$\left| \frac{1}{f} \frac{d}{dt} \right| < 1.$$

Eine andere von C. G. ROSSBY vorgeschlagene Approximation geht von der Voraussetzung aus, dass die individuellen Geschwindigkeitsänderungen grösser sind als die lokalen. Es zeigt sich dies rein erfahrungsgemäss daran, dass in einem bewegten Strömungs-

Tellus V (1953), 3

system die Windgeschwindigkeit durchwegs grösser ist als die Verlagerungsgeschwindigkeit. Man kann also in (1), wofür auch mit

$$\eta = \zeta + f \quad (8)$$

als absoluter Vorticity (Vertikalkomponente des Wirbels der Absolutgeschwindigkeit) die Schreibweise

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} - \eta v &= -\frac{\partial E}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \eta u &= -\frac{\partial E}{\partial y} \end{aligned} \quad (9)$$

möglich ist, in erster Näherung die lokale Beschleunigung vernachlässigen. Mit

$$E = \frac{u^2 + v^2}{2} + \Phi \quad (10)$$

folgt aus (9)

$$\begin{aligned} u_s &= -\frac{1}{\eta} \frac{\partial E}{\partial y} \\ v_s &= \frac{1}{\eta} \frac{\partial E}{\partial x} \end{aligned} \quad (11)$$

(Der Index s kennzeichnet Stationarität.) Die auf der rechten Seite von (11) enthaltenen Geschwindigkeiten müssen allerdings geostrophisch approximiert werden, also

$$\begin{aligned} u_s &\approx -\frac{1}{\eta_g} \frac{\partial E_g}{\partial y} \\ v_s &\approx \frac{1}{\eta_g} \frac{\partial E_g}{\partial x}. \end{aligned} \quad (12)$$

Eine weitere Approximation wurde von G. HOLLMANN angegeben. Sie setzt divergenzfreie Bewegungen voraus, erscheint also für Rechnungen im divergenzfreien Niveau entwicklungsfreier Felder anwendbar. Sie ergibt sich aus (1), indem man zunächst zur ersten Gleichung die Identität

$$u \frac{\partial v}{\partial y} - v \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

und zur zweiten Gleichung die Identität

$$v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

addiert, also

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + Du + v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y} - fv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Dv + u \frac{\partial v}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial x} + fu &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{aligned}\quad (13)$$

erhält. Führen wir den Azimutwinkel

$$\alpha = \arctg \frac{v}{u} \quad (14)$$

ein, so können wir (13) auf die Form

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} + Du - 2K \frac{\partial \alpha}{\partial y} - fv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + Dv + 2K \frac{\partial \alpha}{\partial x} + fu &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{aligned}\quad (15)$$

bringen. Bei divergenzfreier Bewegung reduziert sich (15) auf

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} - 2K \frac{\partial \alpha}{\partial y} - fv &= -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial t} + 2K \frac{\partial \alpha}{\partial x} + fu &= -\frac{\partial \Phi}{\partial y}\end{aligned}\quad (16)$$

und bei Stationarität auf

$$\begin{aligned}u_{Ds} &= u_g - \frac{2K}{f} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ v_{Ds} &= v_g - \frac{2K}{f} \frac{\partial \alpha}{\partial y}\end{aligned}\quad (17)$$

Die Gleichung (17) stellt die analytische Formulierung des folgenden Satzes dar:

Bei stationärer divergenzfreier Bewegung steht die geostrophische Windkomponente senkrecht auf den Linien $\alpha = \text{const.}$ (Isogonen) und weist zu Gebieten kleineren Azimuts.

Für praktische Zwecke dürfte es genügen, das Azimut geostrophisch zu approximieren, da die Isobaren und Stromlinien nur wenig von einander abweichen. Hingegen ist es nicht ratsam, die kinetische Energie K geostrophisch darzustellen. Eine bessere Annäherung erreicht man durch Quadrierung jeder

Gleichung von (17) und anschließender Addition. Die sich mit $\alpha \approx \alpha_g$ ergebende quadratische Gleichung

$$\begin{aligned}K^2 - \frac{f^2}{2(\nabla \alpha_g)^2} \left(1 + \frac{\mathbf{v}_g \cdot \nabla \alpha_g}{f} \right) K + \\ + \frac{f^2}{2(\nabla \alpha_g)^2} K_g = 0\end{aligned}$$

liefert nach Reihenentwicklung der Wurzel

$$K = \frac{f K_g}{f + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \alpha_g} + \frac{2f(\nabla \alpha_g)^2 K_g}{(f + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \alpha_g)^3} + \dots$$

In manchen Fällen dürfte es genügen, bereits nach dem ersten Glied abzuberechnen. Für nicht stationäre Bewegungen liefert (17) ausserdem ungefähr die richtige Vorticity-Verteilung, da die lokale Änderung bei geostrophischer Darstellung, also

$$\begin{aligned}u_D &= u_g - \frac{2K}{f} \frac{\partial \alpha_g}{\partial x} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} \\ v_D &= v_g - \frac{2K}{f} \frac{\partial \alpha_g}{\partial y} - \frac{1}{f^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial t}\end{aligned}\quad (18)$$

herausfällt, wenn man die Wirbeloperation durchführt

$$\zeta_D = \zeta_g - \frac{2}{f} \frac{\partial (K, \alpha_g)}{\partial (x, y)} \quad (19)$$

Offenbar stellen das Azimut und die kinetische Energie zwei Grössen dar, die das horizontale Geschwindigkeitsfeld bestimmen. Eine der Energiegleichung (5) analoge Beziehung ergibt sich aus (15), indem man die erste Gleichung mit v , die zweite mit u multipliziert, dann beide Gleichungen voneinander subtrahiert und von (14) Gebrauch macht. Mit

$$\delta \mathbf{v}_g = \mathbf{v} - \mathbf{v}_g \quad (20)$$

gewinnt man

$$\frac{d\alpha}{dt} = -\frac{f}{2K} \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v}_g \quad (21)$$

und entsprechend (5)

$$\frac{dK}{dt} = f[\mathbf{v}, \delta \mathbf{v}_g] \cdot \mathbf{K} \quad (22)$$

$\mathbf{K}$ = Einheitsvektor in der Vertikalen.

3. Die Genauigkeit einiger Approximationen bei starrer Rotation und bei Deformation

Wir wollen nunmehr die verschiedenen Approximationen (4), (7) und (12) an Hand zweier einfacher Bewegungen untersuchen.

a) Starre Rotation: Bei Einführung von ebenen Polarkoordinaten (r, ϑ) gilt bei rotations-symmetrischer stationärer Bewegung

$$\mathbf{v} = (0, v_\vartheta) \quad (23)$$

und

$$\frac{v_\vartheta^2}{r} + f v_\vartheta = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \quad (24)$$

mit

$$v_\vartheta = \omega r, \quad \omega = \text{const.}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = f \omega_g r \quad (25)$$

also

$$\omega^2 + f \omega = f \omega_g. \quad (26)$$

Der relative Fehler der geostrophischen Approximation ergibt sich zu

$$\frac{\omega_g - \omega}{\omega} = \frac{\omega}{f}. \quad (27)$$

Im Falle der Philipps'schen Approximation

$$\omega_g^2 + f \omega_1 = f \omega_g$$

findet man

$$\frac{\omega_1 - \omega}{\omega} = - \frac{\omega^2}{f^2} \left(2 + \frac{\omega}{f} \right). \quad (28)$$

Um ROSSBY'S stationäre Approximation zu untersuchen, ist

$$\eta_g = \zeta_g + f, \quad \eta_g = 2 \omega_g + f, \quad K_g = \frac{\omega_g^2 r^2}{2}$$

zu bilden, was wegen

$$\omega_s r = \frac{1}{\eta_g} \frac{\partial}{\partial r} (K_g + \Phi)$$

und (26) auf

Tellus V (1953), 3

$$\frac{\omega_s - \omega}{\omega} = \frac{\omega^3}{f^3} \cdot \frac{1}{1 + \frac{2\omega}{f} + \frac{2\omega^2}{f^2}} \quad (29)$$

führt. Zum Vergleich der Approximationen setzen wir

$$\omega = 0,5 \cdot f,$$

also zyklonale Rotation an. Wir finden

$$\frac{\omega_s - \omega}{\omega} = 0,5, \quad \frac{\omega_1 - \omega}{\omega} = -0,625,$$

$$\frac{\omega_s - \omega}{\omega} = 0,05.$$

Für

$$\omega = -0,5 \cdot f$$

findet man

$$\frac{\omega_g - \omega}{\omega} = -0,5, \quad \frac{\omega_1 - \omega}{\omega} = -0,375,$$

$$\frac{\omega_s - \omega}{\omega} = -0,25.$$

Es zeigt sich, dass in diesem Fall die stationäre Approximation am genauesten ist.

b) Deformation: Es sei

$$u = \lambda y, \quad v = \lambda x \quad (30)$$

Die Stromlinien sind Hyperbeln. Da der Ansatz (30) auf (1) angewandt die Integrabilitätsbedingung erfüllt, lässt sich das zugehörige Druckfeld (Potentialfeld) zu

$$\Phi = -(\lambda^2 - f\lambda) \frac{x^2}{2} - (\lambda^2 + f\lambda) \frac{y^2}{2} + \text{const.} \quad (31)$$

ermitteln. Die geostrophische Approximation ergibt

$$u_g = \frac{f\lambda + \lambda^2}{f} y, \quad v_g = \frac{f\lambda - \lambda^2}{f} x, \quad (32)$$

also aus (30) und (32)

$$\frac{u_g - u}{u} = \frac{\lambda}{f}, \quad \frac{v_g - v}{v} = -\frac{\lambda}{f} \quad (33)$$

und

$$\zeta_g = -\frac{2\lambda^2}{f}. \quad (34)$$

Da das Feld (30) divergenz- und wirbelfrei ist, wird geostrophisch ein antizyklonaler Wirbel vorgetäuscht. Auf ähnliche Weise lassen sich die übrigen Approximationen untersuchen. Aus (7) und (32) folgt

$$\begin{aligned} u_1 &= \left(\lambda + \frac{\lambda^4}{f^3} \right) \gamma \\ v_1 &= \left(\lambda - \frac{\lambda^4}{f^3} \right) x \end{aligned} \quad (35)$$

also als relative Abweichung

$$\frac{u_1 - u}{u} = \frac{\lambda^3}{f^3}, \quad \frac{v_1 - v}{v} = -\frac{\lambda^3}{f^3} \quad (36)$$

und als Vorticity

$$\zeta_1 = -\frac{2\lambda^4}{f^3}. \quad (37)$$

Ferner bestimmt man

$$u_s = \left(\lambda - \frac{\lambda^4}{f^3 - 2f\lambda^2} \right) \gamma, \quad v_s = \left(\lambda + \frac{\lambda^4}{f^3 - 2f\lambda^2} \right) x \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{u_s - u}{u} &= -\frac{I}{I - \frac{2\lambda^2}{f^2}} \frac{\lambda^3}{f^3}, \\ \frac{v_s - v}{v} &= \frac{I}{I - \frac{2\lambda^2}{f^2}} \frac{\lambda^3}{f^3} \end{aligned} \quad (39)$$

$$\zeta_s = \frac{2\lambda^4}{f^3 - 2f\lambda^2}. \quad (40)$$

Im Deformationsfeld hängt die Genauigkeit der Approximationen vom Parameter λ ab. Bei grossem λ (starke Windscherung) wird die stationäre Approximation (38) ungenau und entartet völlig (Singularität), wenn

$\lambda = \pm f/\sqrt{2}$, was wegen $f \approx 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$ bei $\lambda \approx 0.7 \cdot f$ der Fall ist. Wenn dies auch ein hoher Betrag für die Windscherung ist, unterliegt es keinem Zweifel, dass derartige Werte im Bereich des Jet-stream erreicht werden. Im ganzen gesehen ist also im Deformationsfeld die Philipps'sche Approximation die genaueste. Es dürfte aber aus den bisherigen Entwicklungen ersichtlich sein, dass die Frage, welche Approximation die beste ist, nicht allgemein beantwortet werden kann. Es kommt wesentlich auf die Art der Feldverteilung an. Daher werden wir im folgenden Absatz eine etwas allgemeinere Lösung der Bewegungsgleichungen heranziehen, in der u.a. auch Felder der oben behandelten Art auftreten.

4. Prüfung verschiedener Approximationen an Hand der CRAIG-NEAMTAN'schen Lösung

Unter der Voraussetzung divergenzfreier Strömung

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

existiert eine Stromfunktion

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\partial \psi}{\partial y} \\ v &= \frac{\partial \psi}{\partial x}, \end{aligned} \quad (41)$$

so dass die Vorticity-Gleichung mit

$$f = f_0 + \beta y \quad (42)$$

auf die Form

$$\begin{aligned} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \\ + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0 \end{aligned} \quad (43)$$

gebracht werden kann. Im Anschluss an CRAIG (1945) hat NEAMTAN (1946) eine Lösung der nichtlinearen Gleichung (43) angegeben, die sich folgendermassen schreibt:

$$\psi = -Uy + C \sin(\alpha y + \varepsilon) + A \sin k(x - ct) \sin ly, \quad (44)$$

worin

$$\alpha = \sqrt{k^2 + l^2}, \quad c = U - \frac{\beta}{k^2 + l^2}. \quad (45)$$

Da es eine exakte Lösung ist, lässt sich auch die zugehörige Verteilung des Druck- bzw. Geopotentialfeldes bestimmen. Sie wurde von V. STARR (1950) angegeben. Eine ähnliche Lösung in Kugelkoordinaten mit der zugehörigen Geopotentialverteilung hat G. HOLLMANN (1950) hergeleitet.

Wir wollen uns in den folgenden Zeilen mit einer etwas vereinfachten Lösung beschäftigen, nämlich

$$\psi = -Uy - \frac{V}{k} \sin ky + \frac{A}{k} \sin k(x - ct) \quad (46)$$

$$c = U - \frac{\beta}{k^2} \quad (47)$$

Sie setzt sich zusammen aus einer stationären Zonalverteilung mit scherender Grundströmung, der eine in zentraler Richtung wandernde Welle überlagert ist. Die zu (46) gehörende Geopotentialverteilung ergibt sich zu

$$\begin{aligned} \Phi = & -fUy - \frac{fV}{k} \sin ky + \\ & + AV \sin k(x - ct) \sin ky + \frac{\beta}{2} y^2 U + \\ & + \frac{f}{k} A \sin k(x - ct) - \frac{BV}{k^2} \cos ky + G(t). \end{aligned} \quad (48)$$

Die für unsere Zwecke unbedeutende Funktion $G(t)$ lassen wir unbestimmt. Es wurden nunmehr folgende numerische Werte für die in (46) bis (48) auftretenden Parameter angenommen:

$U = 20$ m/sek, $V = 30$ m/sek, $A = 10$ m/sek, $L = 4 \cdot 10^6$ m ($k = 2\pi/L$), $f_0 = 10^{-4}$ sek $^{-1}$, $\beta = 0,16 \cdot 10^{-10}$ m $^{-1}$ sek $^{-1}$.

Daraus folgt $c = 13,6$ m/sek. Für den Bereich $-L/2 \leq x \leq +L/2$, $-L/2 \leq y \leq L/2$ sind die Stromfunktion ψ und das Geopoten-

Tellus V (1953), 2

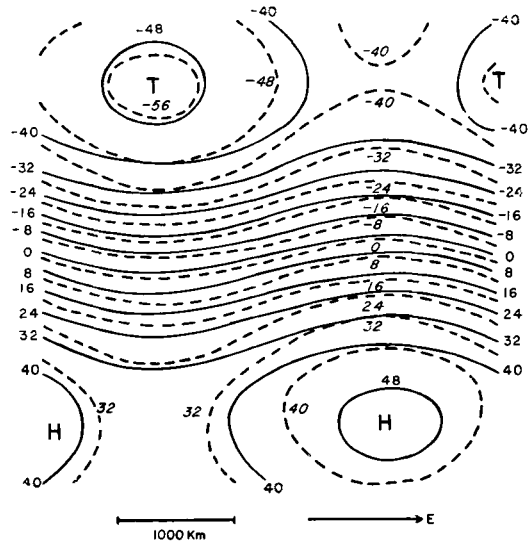


Fig. 1. Verteilung der Stromfunktion. Einheit 10^6 m 2 /sek. (ausgezogene Linien). Verteilung des Geopotentials. Einheit 10^2 m 2 /sek. 2 (strichlierte Linien).

tial Φ in Fig. 1 dargestellt. Die Verteilung zeigt einen mäandernden Jet-Stream, südlich davon antizyklonale, nördlich davon zyklonale Zentren. Die Ähnlichkeit beider Felder ist offensichtlich. Immerhin sind die zyklonalen Wirbel im Geopotentialfeld stärker ausgeprägt als im Stromfeld. Für die antizyklonalen Gebiete gilt das Umgekehrte.

Die geostrophischen Komponenten ergeben sich zu

$$\begin{aligned} u_g &= U + V \cos ky - \frac{AVk}{f} \sin k(x - ct) \cos ky \\ v_g &= A \cos k(x - ct) + \frac{AVk}{f} \cos k(x - ct) \sin ky \end{aligned} \quad (49)$$

Die barotrope Vorticity-Gleichung

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \eta = -\eta \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (50)$$

wird unter Vernachlässigung des Divergenzterms integriert. Bildet man von der ersten Philipps'schen Näherung (7) die Divergenz, so ergibt sich

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = \left(1 - \frac{\zeta_g}{f}\right) \left(\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y}\right) - \mathbf{v}_g \cdot \nabla \frac{\zeta_g}{f} - \frac{1}{f} \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} \quad (51)$$

Bei geostrophischer Approximation der linken Seite von (50) findet man

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \zeta_g + \beta v_g = -\eta \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (52)$$

Da andererseits

$$\frac{\partial u_g}{\partial x} + \frac{\partial v_g}{\partial y} = -\beta v_g \quad (53)$$

gilt, ist im Falle $\zeta_g \ll f$, was gewöhnlich angenommen wird, nach (51)

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial v_1}{\partial y} = -\frac{1}{f} \left(\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \zeta_g + \beta v_g \right) \quad (54)$$

d.h. die geostrophisch approximierte barotrope Vorticity-Gleichung

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} + \mathbf{v}_g \cdot \nabla \zeta_g + \beta v_g = 0 \quad (55)$$

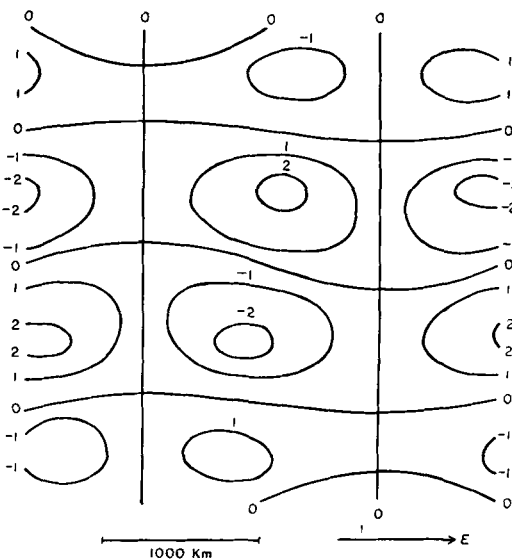


Fig. 2. Verteilung der fiktiven Divergenzen. Einheit 10^{-6} sek^{-1} .

ist im wesentlichen die gleich Null gesetzte Divergenz der ersten Philipps'schen Näherung. Für den wahren Wind gilt in unserem Beispiel natürlich (55) exakt, jedoch wird durch die Annahme $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v}_g$, $\zeta \rightarrow \zeta_g$ (55) nicht mehr erfüllt. Der Rest stellt daher nichts anderes als ein vorgetäushtes

$$\eta \nabla \cdot \mathbf{v} \approx f \nabla \cdot \mathbf{v} \quad (56)$$

dar. Diese fiktiven Divergenzen (Fig. 2) erreichen maximal $2 \cdot 10^{-6} \text{ sek}^{-1}$. Physikalisch kann der Sachverhalt folgendermassen gedeutet werden: Die Vorticity-Gleichung mit der fiktiven Divergenz D_f lautet

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = -\mathbf{v}_g \cdot \nabla \eta_g - f D_f \quad (57)$$

Wenn nun in Gebieten $-\mathbf{v}_g \cdot \nabla \eta_g > 0$ (Ostseite der Tröge), bedeutet eine positive Divergenz eine Herabsetzung der Vorticityadvektion, d.h. bei Vernachlässigung von D_f , wie es in der Praxis geschieht, wird die Vorticityadvektion überschätzt; in Wirklichkeit wandert der Trog langsamer als mit der geostrophischen Approximation der Vorticity-Gleichung vorausberechnet wird. Da nach (49)

$$\zeta_g = -kA \sin k(x - ct) + kV \sin ky - \frac{2k^2 AV}{f} \sin k(x - ct) \sin ky \quad (58)$$

also

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta_g}{\partial t} &= k^2 A c \cos k(x - ct) + \\ &+ \frac{2k^2 AV c}{f} \cos k(x - ct) \sin ky \end{aligned} \quad (59)$$

gilt, findet man mit den obigen Koeffizienten zur Zeit $t = 0$ bei $x = 0$ und $y = L/6$

$$\frac{\partial \zeta_g}{\partial t} = 6,1 \cdot 10^{-10} \text{ sek}^{-2}$$

Die fiktive Divergenz beträgt hier

$$D_f = 2,1 \cdot 10^{-6} \text{ sek}^{-1}$$

Mit $f \approx 10^{-4} \text{ sek}^{-1}$ wird also hier mit der geostrophischen Approximation bei Vernachlässigung von D_f

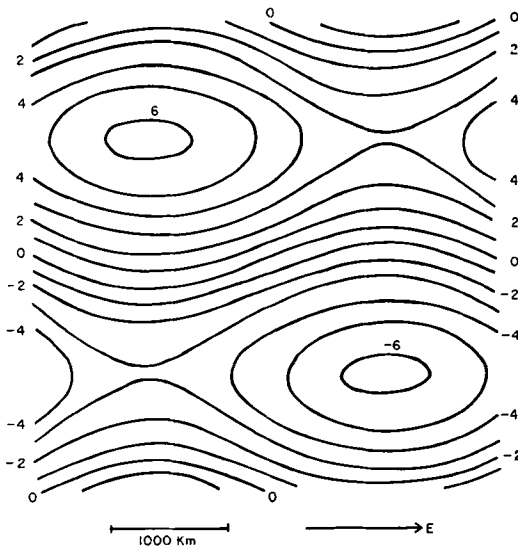


Fig. 3. Verteilung der wirklichen relativen Vorticity. Einheit 10^{-5} sek^{-1} .

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = 8,2 \cdot 10^{-10} \text{ sek}^{-2}$$

berechnet. Der Fehler beträgt also etwa 30 %. Natürlich ist dies ein Maximalwert. Die Vorticityadvektion wird überschätzt. Analoges gilt für die anderen Gebiete. Jedoch ist zu erwarten, dass es sich bei diesen Fehlern häufig um "stabile Fehler" handelt. Die

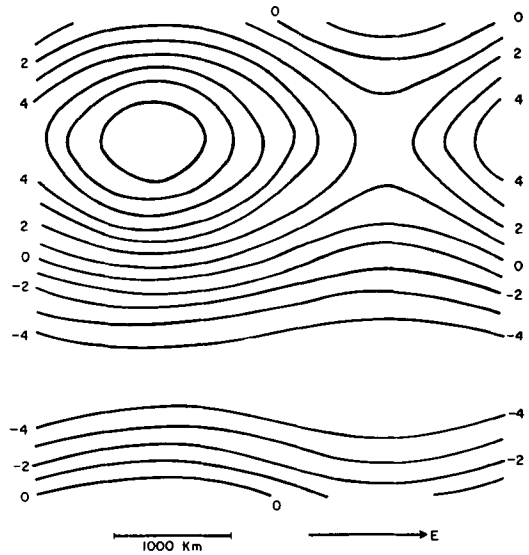


Fig. 4. Verteilung der geostrophischen relativen Vorticity. Einheit 10^{-5} sek^{-1} .

Druckverteilung wird wahrscheinlich während der Rechnung so deformiert, dass die fiktive Divergenz gegen Null geht, denn sonst würden sich auch Ungenauigkeiten der Kartenanalysen stärker auswirken als es tatsächlich der Fall ist.

In den Fig. 3 bis 6 haben wir die Verteilung der verschiedenen relativen Vorticity zur Darstellung gebracht. Nacheinander geben

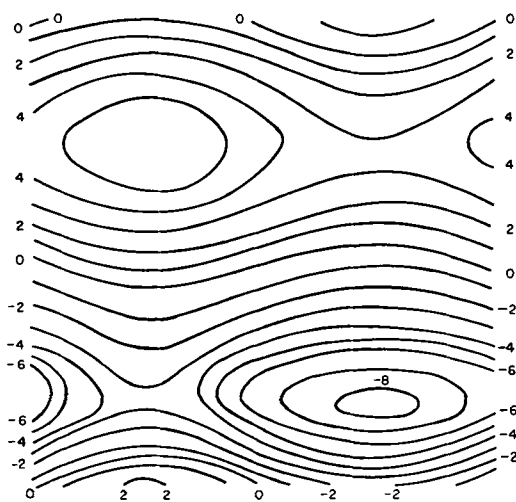


Fig. 5. Verteilung der relativen Vorticity nach der stationären Approximation. Einheit 10^{-5} sek^{-1} .

Tellus V (1953), 2

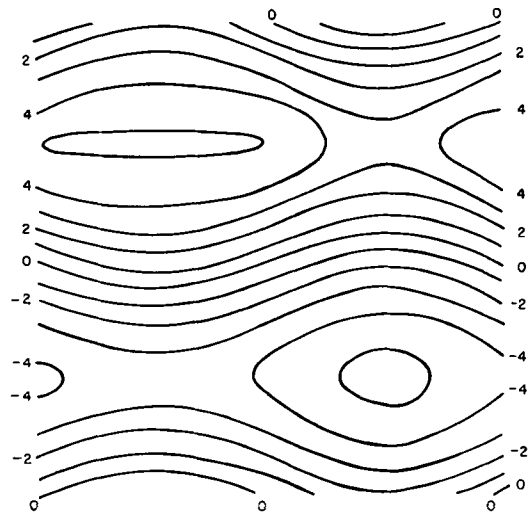


Fig. 6. Verteilung der relativen Vorticity nach der zweiten geostrophischen Approximation. Einheit 10^{-5} sek^{-1} .

Fig. 3 die wirkliche, Fig. 4 die geostrophische, Fig. 5 die stationäre, Fig. 6 diejenige der ersten Philipps'schen Näherung entsprechende Verteilung wieder.

Die geostrophische Vorticity zeigt eine Ueberschätzung im zyklonalen, eine Unterschätzung im antizyklonalen Gebiet. Die stationäre Vorticity lautet gemäss (12)

$$\zeta_s = \frac{1}{\eta_g} \nabla^2 E_g - \frac{1}{\eta_g^2} (\nabla \eta_g \cdot \nabla E_g). \quad (60)$$

Sie erreicht im zyklonalen Gebiet nahezu die richtige Verteilung, ist jedoch im antizyklonalen Gebiet erheblich überschätzt, was offenbar auf den zweiten Term in (60) zurückzuführen ist. Entsprechend (7) folgt

$$\begin{aligned} \zeta_1 = \zeta_g \left(1 - \frac{\zeta_g}{f} \right) + \frac{1}{f} [\mathbf{v}_g, \nabla \zeta_g] \cdot \mathbf{K} + \\ + \frac{1}{f} \nabla^2 K_g. \end{aligned} \quad (61)$$

Die Approximation der ersten Philipps'schen Näherung unterschätzt, wie Fig. 6 zeigt, im

Absolutbetrag etwas zyklonale und antizyklonale Vorticity, ist jedoch symmetrischer als die beiden vorhergehenden.

Natürlich sind die hier dargebotenen Ergebnisse noch wesentlich erweiterungsfähig, einmal in Hinsicht auf die CRAIG-NEAMTANsche Lösung mit Berücksichtigung der γ -Abhängigkeit der Amplitude der zonal wandernden Welle oder auf eine mögliche Konstruktion weiterer Lösungen der nichtlinearen Gleichung (43), zum anderen bezüglich der Ueberprüfung weiterer Approximationen, z. B. auch der in (17) bis (19) angeführten. In diesem Sinne möge diese Untersuchung auch als Anregung für weitere Forschungen aufgefasst werden in Anbetracht der grossen Bedeutung einer zweckmässigen Approximation der Geschwindigkeitskomponenten für die numerische Wettervorhersage.

Für das grosse Interesse, das er der Arbeit entgegengebracht hat, und für zahlreiche wertvolle Ratschläge möchten die Verfasser nicht versäumen, Herrn Prof. C. G. ROSSBY ihren herzlichen Dank auszusprechen.

LITERATURNACHWEIS

- BOLIN, B., & CHARNEY, J., 1951: Numerical tendency computations from the barotropic vorticity equation. *Tellus* **3**, 4, pp. 248—257.
- CHARNEY, J., 1948: On the scale of atmospheric motions. *Geophys. Publ.*, **17**, 2, 17 pp.
- CHARNEY, J., FJØRTOFT, R., and VON NEUMANN, J., 1950: Numerical integration of the barotropic vorticity equation, *Tellus*, **2**, 4, pp. 237—354.
- CRAIG, R., 1945: A solution of the nonlinear vorticity equation for atmospheric motion. *J. Met.*, **2**, pp. 173—178.
- ERTEL, H., 1941: Ueber neue atmosphärische Bewegungsgleichungen und eine Differentialgleichung des Luftdruckfeldes. *Met. Z.*, **58**, pp. 75—76.
- HINKELMANN, K., 1951: Der Mechanismus des meteorologischen Lärms. *Tellus* **3**, 4, pp. 285—296.
- HOLLMANN, G., 1950: Theorie isobarer Bewegungen. *Z. f. Met.*, **4**, pp. 130—136.
- NEAMTAN, S., 1946: The motion of harmonic waves in the atmosphere. *J. Met.*, **3**, pp. 53—56.
- PHILIPPS, H., 1939: Die Abweichung vom geostrophischen Wind. *Met. Z.*, **56**, pp. 461—483.
- ROSSBY, C. G., 1939: Relation between variations in the intensity of the zonal circulation of the atmosphere and the displacements of semipermanent centers of action. *J. Mar. Res.*, **2**, 1, pp. 38—55.
- STAFF MEMBERS UNIVERSITY OF STOCKHOLM, 1952: Preliminary report on the prognostic value of barotropic models in the forecasting of 500 mb height changes. *Tellus* **4**, 1, pp. 21—30.
- STARR, V., 1950: Geostrophic departures in the Jet-Stream. *Tellus*, **2**, 3, pp. 233—235.