

Les ondes atmosphériques considérées comme associées aux discontinuités du tourbillon

The atmospheric waves considered as associated with the
vorticity discontinuities

Par PAUL QUENEY, Université de Paris

(First manuscript received 1 August 1951, revised 1 October 1951)

Abstract

It is suggested that the jet stream at about 12 km-level may be idealized as a system of two or three zonal currents with uniform but different values of absolute vertical vorticity ζ , and such that the wind velocity itself is continuous at each boundary.

The approximation of a horizontal non-divergent motion is made for the jet-stream's waves (chapter II), and a proper system of equations is derived for these waves (by using the meridional coordinate γ defined by $\tanh \gamma = \sin \varphi$ (φ = latitude), the equations are particularly simple even when the earth's curvature is taken into account, and in the case of constant ζ the problem is reduced to the resolution of the very classical equation $\nabla^2 \psi = 0$, where ψ is the local disturbance of the stream function.

The case of a simple jet (two currents), then that of a double jet (three currents) are successively considered in the next chapter, the wave motion being assumed to vanish at each pole, and it is also shown how some of the results can be generalized for a larger number of currents. (In any case the dispersion equation, giving the angular phase-velocity α in terms of the angular wave-length λ (inverse of the wave number, which must be an integer), is an algebraic one in α , and its degree equals the number of internal boundaries.) The waves of a simple jet are therefore all stable (their dispersion equation is $\alpha = \omega_0 - \sigma_0 \lambda$, if ω_0 is the angular wind-velocity at the axis, and $2\sigma_0$ denotes the ζ -discontinuity, positive northwards). On the contrary, a system of more than two currents may have unstable (amplified) waves, if one discontinuity $2\sigma_0$ is negative while the other ones are all positive. If in addition σ_0 is small, the wave lengths of the unstable waves form a definite series of spectral lines, the maximum number of which equals the number of the positive discontinuities, and the phase velocity of these waves is approximately the wind velocity at the latitude of the negative discontinuity: in the special case of a double jet, there is therefore at most one unstable wave length λ_0 , given by $\lambda_0 = (\omega_1 - \omega_0)/\sigma_1$, where the subscripts 0 and 1 are relative to the negative and positive discontinuity, respectively. For all the waves of a simple or double jet, there is a maximum of the amplitude at a definite latitude and the wave motion becomes negligible at a distance of the order of the wave length.

The effect of horizontal eddy-viscosity is discussed in chapter IV. If the kinematical coefficient is of the order of 10^6 C. G. S. at most, it is found that the wave motion is generally modified only in the vicinity of the boundaries. The conclusions are however different in the special case where one discontinuity is very small: some of the stable waves are then changed to damped waves, while the unstable waves are practically unmodified. The problem involves Bessel functions of order $1/3$.

Chapter V contains a tentative theory of the semi-permanent centers of action, based on the properties of the stationary waves of a simple or double jet. For any given wave number, stationary waves are found to be possible in a westerly simple jet with a maximum wind-velocity U_0 along the axis, provided $U_0 = \sigma_0 L/2\pi$ (resonance condition), where L is the wave-

length at the latitude of the axis, and if σ_0 is assumed to have the constant value 3.5×10^{-5} C. G. S., the results do not differ essentially from those derived from Rossby's theory. But this agreement disappears in the case of a double jet, since there are generally at least two very different such jets corresponding to the same given wave number, and that may explain why the correlation between the zonal index and the number of centers of action is often rather loose. It is also possible to have two simultaneous different stationary wave lengths in the same jet-stream.

The last chapter is similarly devoted to a tentative theory of cyclone waves, based on the properties of the unstable waves appearing in a simple or double jet, when such a jet is slightly deformed by an additional negative ζ -discontinuity. It is suggested that the agent of this deformation may be the vertical convection created in the lower atmosphere by thermal instability, since this convection tends to reduce the wind velocity in a relatively narrow zone above the instability area. If the assumption is made that the unstable waves can represent cyclone waves provided their wave length is larger than 1,000 km and smaller than 4,000 km, with an amplification coefficient larger than 10^{-8} C. G. S., it is found that cyclone waves can develop in a simple jet if the deformation takes place in either one of two "sensitive zones" located at less than 300 km on each side of the axis, and not larger than 500 km about. For a double jet there are normally four such sensitive zones. All the properties of these theoretical cyclone waves agree quite well with that of the actual cyclone waves of the polar fronts, except for the phase velocity which is somewhat too large, but this discrepancy is not surprising since the dynamical effect of the lower atmosphere has been disregarded. Finally it is suggested that the same theory can also apply to tropical cyclones and easterly waves, if the assumption is made that these features are produced when one of the sensitive zones of the jet stream happens to penetrate into a monsoon area for instance.

I. Introduction

Au cours des 30 dernières années, deux tendances principales et apparemment divergentes se sont manifestées en météorologie théorique. La première, directement dérivée des idées norvégiennes, consiste à rattacher les propriétés des perturbations atmosphériques à la baroclinité de la troposphère moyenne (propriété traduisant le fait que les surfaces isothermes sont inclinées par rapport aux surfaces isobares) et au gradient vertical du vent qui lui est nécessairement associé, et à faire jouer en outre un rôle essentiel aux surfaces de discontinuité de la température. Les problèmes de perturbation traduisant cette conception se sont révélés particulièrement complexes, car les modèles hydrodynamiques auxquels on est conduit sont essentiellement à trois dimensions. La seconde tendance, développée surtout après les travaux de ROSSBY (1939), attribue au contraire le rôle principal à la couche barotrope voisine de la tropopause, et qui est celle où la circulation générale possède la plus grande énergie aux latitudes moyennes; en outre, comme les mouvements dans cette couche sont tous très approximativement horizontaux et en moyenne zonaux à l'échelle synoptique, on est ramené à des problèmes hydrodynamiques à deux dimensions seulement, donc relativement simples. Nous citerons en particulier, comme travaux se rattachant à

cette tendance, ceux d'HAURWITZ (1940), de KUO (1949 et 1950), et ceux de PLATZMAN (1949). Le dernier auteur est le premier qui semble avoir montré l'importance des discontinuités du tourbillon dans la couche barotrope: son modèle de circulation générale comporte, en effet, deux courants zonaux où la composante verticale du tourbillon absolu est uniforme, avec une discontinuité de ce tourbillon sur leur frontière commune, ce modèle étant manifestement inspiré de celui considéré antérieurement par ROSSBY (1947).

L'objet du présent travail est précisément l'étude des ondes horizontales associées aux discontinuités du tourbillon dans la couche barotrope, en vue d'applications aux ondes atmosphériques réelles, et en particulier aux ondes de cyclone; nous retrouverons l'un des résultats de Platzman, mais au lieu de considérer seulement le cas d'une discontinuité unique (jet-stream simple), qui ne conduit qu'à des ondes stables, nous envisagerons celui où l'on a deux discontinuités à des latitudes différentes (jet-stream double), de sorte que nous arriverons à des résultats plus généraux et plus directement applicables (d'après CRESSMAN 1950), le cas le plus fréquent est en effet celui d'un jet double).

Bien que le développement de l'aérologie semble confirmer de plus en plus que c'est bien

la couche barotrope voisine de l'altitude 12 km qui joue le rôle principal dans la dynamique de la plupart des perturbations atmosphériques d'échelle synoptique, il n'en reste pas moins certain que l'apparition et même le développement de ces perturbations ne peuvent s'expliquer que si l'on tient compte des phénomènes ayant leur siège dans les couches baroclines situées de part et d'autre, et en particulier des phénomènes de la troposphère moyenne et inférieure. Cela est évident pour les ondes longues quasi-stationnaires associées aux centres d'action, et qui sont manifestement commandées par la répartition des continents et des océans, ce qui ne peut se concevoir que par l'intervention des basses couches de l'atmosphère. Mais cela n'est pas moins certain pour les perturbations cycloniques extra-tropicales, lesquelles apparaissent essentiellement là où une masse d'air froid d'origine continentale ou polaire parvient au-dessus d'une région maritime ou continentale relativement chaude: c'est ainsi qu'en Méditerranée les perturbations d'hiver se forment toujours lors d'une invasion d'air froid venant du Nord, et SVERDRUP (1943) a montré de même que la plupart des perturbations de front polaire nord-atlantique peuvent s'expliquer par un phénomène analogue dans la région des eaux tropicales du système du Gulf-Stream. On comprend ainsi pourquoi les fronts polaires sont surtout actifs en hiver, lorsque les masses d'air froid sont particulièrement bien développées, et pourquoi c'est également en hiver qu'ils s'approchent en moyenne le plus de l'équateur. En été, c'est au contraire surtout sur les continents que l'on observe la formation de perturbations cycloniques, et alors il est naturel de faire appel, pour les expliquer, à l'arrivée d'une masse d'air frais océanique sur le sol relativement chaud des continents.

En somme, l'un des facteurs déterminants de la cyclogénèse, ce serait non pas le conflit entre deux masses d'air juxtaposées de températures différentes, mais bien plutôt *le conflit entre une masse d'air froid et un sol chaud*, que ce sol soit de nature maritime ou continentale; ce serait donc un facteur d'instabilité thermique ayant son siège dans la troposphère inférieure. Nous aurons à nous baser sur cette conclusion dans le chapitre sur les ondes de cyclone, et à chercher alors sous quelle forme on peut concevoir l'interaction nécessaire qui existe

entre la troposphère inférieure et la couche barotrope du jet-stream.

Ainsi que l'ont fait la plupart des auteurs dont nous avons mentionné ci-dessus les travaux, nous considérerons des perturbations de faible amplitude (infinitésimales) superposées à un courant de base zonal, et telles que le mouvement perturbé soit non seulement horizontal, mais en outre sans divergence, car l'effet de la compressibilité de l'air est négligeable à l'échelle synoptique s'il n'y a pas de mouvement vertical. L'étude du mouvement peut alors être faite sur une surface de niveau déterminée, sans qu'il soit nécessaire de rien connaître de l'atmosphère en dehors de cette surface. Il est important de remarquer qu'une telle hypothèse relative au mouvement perturbé n'est possible que grâce à la barotropie du mouvement de base: nous avons en effet montré dans un travail récent (QUENEY 1950) que le fait de négliger a priori la vitesse verticale dans les équations de perturbation conduisait à des contradictions mathématiques dans le cas d'une atmosphère barocline.

Nous prendrons comme perturbations élémentaires ce que nous avons déjà appelé des «ondes zonales», c'est-à-dire telles que la perturbations de toute grandeur hydrodynamique soit donnée en fonction du temps t et de la longitude x par la partie réelle d'une expression de la forme

$$A(\varphi) e^{in(x-\alpha t)} \quad (1)$$

où n est le nombre d'onde (entier positif), α la vitesse de phase angulaire complexe (constante), i l'unité imaginaire, et $A(\varphi)$ la demi-amplitude complexe, supposée infiniment petite et fonction seulement de la latitude φ sur la surface de niveau considérée. Dans la suite c'est toujours de ces ondes que nous nous occuperons, et quand nous parlerons de la perturbation d'une grandeur, il sera entendu qu'il s'agira de son expression complexe de la forme (1), et non de la partie réelle de cette expression.

En plus des paramètres n et α , nous introduirons aussi la longueur d'onde angulaire λ , définie comme l'inverse du nombre d'onde,

$$\lambda = \frac{1}{n} \quad (2)$$

et la pulsation orbitale complexe N , définie en

fonction de la vitesse angulaire ω du mouvement de base par la formule

$$N = n (\omega - \alpha) \quad (3)$$

La partie réelle de cette quantité représente la pulsation orbitale vraie, tandis que la partie imaginaire donne le coefficient d'amortissement de l'onde, compté comme positif ou négatif suivant que cette onde est amortie ou amplifiée (instable) en fonction du temps, et égal par définition au taux de réduction de l'amplitude par unité de temps. Dans les formules (1) et (3) le système de référence peut être indifféremment un système sans rotation absolu ou un système fixe par rapport à la Terre, mais afin d'avoir des formules simples nous supposons toujours que c'est un système absolu, de sorte que ω représentera la vitesse angulaire absolue du mouvement de base: si U désigne la vitesse linéaire par rapport à la Terre (comptée positivement vers l'Est) et Ω la rotation terrestre, on a ainsi

$$U = r (\omega - \Omega) \quad (4)$$

où r désigne la distance à la ligne des pôles.

Nous admettons que la surface de niveau considérée est assimilable à une sphère concentrique à la Terre et de rayon $R = 6.368$ km, donc nous écrirons $r = R \cos \varphi$, et ainsi que l'a déjà proposé KUO (1950) il nous sera commode de prendre comme coordonnée méridienne, au lieu de la latitude φ , la quantité γ définie par

$$\begin{aligned} \gamma &= \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos \varphi} = \frac{1}{2} \log_e \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = \\ &= \log_e \frac{1 + \sin \varphi}{\cos \varphi} \end{aligned} \quad (5)$$

ou par les trois relations équivalentes

$$\text{th } \gamma = \sin \varphi; \text{ sh } \gamma = \text{tg } \varphi; \text{ ch } \gamma = \frac{1}{\cos \varphi} \quad (6)$$

Cette variable γ est celle qui intervient lorsqu'on effectue une représentation conforme de la surface de niveau sphérique sur un cylindre tangent au cercle équatorial; on voit que γ varie de $-\infty$ à $+\infty$ lorsque φ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$; la correspondance numérique

entre γ et φ est indiquée sur l'échelle des abscisses de la figure 1. Grâce à l'emploi de cette coordonnée méridienne, on obtient l'expression simple suivante pour ζ , composante verticale du tourbillon absolu:

$$\zeta = F - \gamma = 2\omega \text{ th } \gamma - \frac{\partial \omega}{\partial \gamma} \quad (7)$$

où $F = 2\omega \sin \varphi$ est une sorte de paramètre de Coriolis généralisé, et $\gamma = \frac{\partial \omega}{\partial \gamma}$ diffère peu du gradient méridien de U .

Le mouvement étant supposé sans divergence, les composantes u et v de la perturbation locale de la vitesse, suivant les directions Est et Nord respectivement, s'expriment en fonction d'un potentiel des vitesses ψ , par les formules

$$v \cos \varphi = \frac{\partial \psi}{\partial x} = i n \psi; u \cos \varphi = - \frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \quad (8)$$

et d'autre part, s'il n'y a pas de viscosité, le mouvement satisfait à l'équation du tourbillon $D\zeta/Dt = 0$. En linéarisant cette équation, et en remplaçant ensuite la perturbation locale de ζ par son expression en fonction de u et v , puis u et v par leurs expressions (8) en fonction de ψ et de $\partial\psi/\partial\gamma$, on arrive à l'équation différentielle suivante pour ψ :

$$\left(N \nabla^2 + \frac{n}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} \right) \psi = 0 \quad (9)$$

où l'opérateur ∇^2 a pour expression

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} \right) = \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - n^2 \right) \quad (10)$$

(dans ces formules, r et $\partial\zeta/\partial\gamma$ sont relatifs au mouvement de base). Cette équation (9), déjà obtenue par KUO (1950) avec des notations un peu différentes, constitue l'équation différentielle fondamentale qui détermine les propriétés des ondes; elle a d'ailleurs aussi été utilisée par plusieurs auteurs dans les cas où la courbure terrestre est négligeable, de sorte qu'alors x et γ représentent des coordonnées cartésiennes ordinaires, mais nous voyons que grâce à l'emploi de la variable γ l'équation est générale et tient compte automatiquement de la courbure terrestre. Nous devons lui adjoindre la for-

mule suivante, donnant en fonction de ψ la perturbation locale p de la pression, et que l'on obtient à partir de l'équation mécanique de perturbation relative à la direction du parallèle géographique :

$$\frac{p}{\varrho R} = \left(\frac{N}{n} \frac{\partial}{\partial y} + \zeta \right) \psi \quad (11)$$

(ϱ désigne la densité dans le mouvement de base, que l'on peut considérer comme une constante puisque ce mouvement est supposé barotrope.

II. Choix d'un mouvement de base simple et conditions aux limites

L'équation (9) indique que les propriétés des ondes dépendent essentiellement de la répartition de ζ sur la surface de niveau considérée, ce qui nous conduit à chercher une loi de répartition simple de ce paramètre, aussi voisine que possible des répartitions réellement observées. Mais il est évident que la loi la plus simple est celle qui consiste à supposer ζ uniforme, car alors on obtient tout simplement l'équation classique de Laplace

$$\nabla^2 \psi = 0, \text{ ou } \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - n^2 \right) \psi = 0 \quad (12)$$

et d'une autre côté, ainsi que l'a déjà montré PLATZMAN (1943), c'est précisément à la considération de courants où ζ est uniforme que l'on est conduit par les seules données empiriques. Rappelons à ce sujet que, dans l'une de ses premières publications relatives au jet-stream, ROSSBY (1947) avait déjà décrit un modèle de jet simple caractérisé par une valeur constante de ζ du côté polaire de l'axe du jet, et par une discontinuité de ζ sur l'axe lui-même, correspondant à un point anguleux dans le profil méridien de la vitesse. Nous sommes ainsi tout naturellement conduit, autant par des raisons d'ordre mathématique que par des raisons d'ordre expérimental, à adopter comme modèle du jet-stream le système formé par un certain nombre de courants zonaux séparés par des lignes de discontinuité de ζ coïncidant avec les axes, et tels que ζ soit uniforme dans chacun des courants au niveau considéré; en outre nous devons supposer que la vitesse elle-même est continue sur les axes: ainsi un jet

simple sera représenté par un système de deux courants de cette nature, et de même un système de trois courants analogues nous fournira une représentation d'un jet double.

Il ne peut d'ailleurs y avoir aucun inconvénient sérieux à supposer que les courants extrêmes s'étendent jusqu'aux pôles, c'est-à-dire jusqu'à $y = +\infty$ et $y = -\infty$ respectivement, si on détermine les solutions de l'équation (12) par la condition qu'elles s'annulent pour ces deux valeurs de y : en effet ces solutions ont alors une valeur négligeable en dehors de la zone centrale du jet, tout comme les ondes réelles du jet-stream.

En plus des conditions à l'infini que nous venons d'indiquer, les conditions aux limites à exprimer sont la continuité de la vitesse méridienne et de la pression sur chacun des axes du jet. Par suite de la continuité de ω ces conditions équivalent à la continuité de ψ et de p , ce qui en vertu de (11) se traduit par les deux relations suivantes, pour chacun des axes:

$$\Delta \psi = 0; \Delta (\partial \psi / \partial y) = - (2 n^2 / N) \psi \quad (13)$$

en désignant de façon générale par ΔA la discontinuité algébrique d'une grandeur A sur l'axe considéré, et en posant

$$\sigma = \Delta \zeta / 2 \quad (14)$$

On note que, si on tient compte des formules (8), la seconde des conditions (13) donne

$$\frac{\Delta u}{v} = \frac{2 \sigma}{i N} \quad (15)$$

d'où l'on déduit que le mouvement ondulatoire possède nécessairement une discontinuité de glissement sur chacun des axes.

Dans la suite nous supposons toujours une discontinuité comptée positivement lorsque l'accroissement de la grandeur considérée a lieu vers les y croissants, c'est-à-dire vers le Nord, de sorte que σ sera toujours positif pour un axe le long duquel ω est maximum, comme c'est le cas normal.

Remarque. — Si au lieu de supposer ζ constant, on suppose $\omega = \text{const}$, on a aussi $N = \text{const}$ et d'autre part $\partial \zeta / \partial y = (\omega / \Omega) r \beta \neq r \beta$, β étant le gradient méridien du paramètre de Coriolis. Si en outre on considère des ondes

dont l'échelle méridienne est grande par rapport à la longueur d'onde, tout en étant petite par rapport au rayon terrestre, on peut dans l'équation (9) négliger $\partial^2/\partial\gamma^2$ à côté de n^2 , et considérer $r\beta$ comme une constante. On obtient ainsi une relation d'où l'on déduit facilement la formule de Rossby

$$c = U - (\beta/4\pi^2) L^2 \quad (16)$$

où L désigne la longueur d'onde linéaire et c la vitesse de propagation, toutes deux assimilables à des constantes. Bien que cette formule ne soit strictement valable que pour des ondes très courtes, on sait que Rossby l'a cependant appliquée même aux ondes d'échelle planétaire. Nous verrons au chapitre V dans quelle mesure les résultats auxquels elle conduit pour de telles ondes sont comparables à ceux déduits de l'hypothèse d'un système de courants à tourbillon vertical uniforme.

III. Ondes en l'absence de viscosité

1. Jet simple

Pour éviter toute complication dans la terminologie, nous conviendrons d'employer l'expression «jet simple» pour tout système de deux courants du type précédemment défini, et celle d'«axe» pour la ligne de séparation de ces courants. Nous généraliserons aussi ces expressions pour un système d'un nombre quelconque de courants. Suivant que la discontinuité du tourbillon est positive ou négative, nous dirons que le jet simple est positif ou négatif. Dans le cas usuel d'un jet-stream d'Ouest, on a affaire à un jet positif, mais la théorie que nous allons faire est générale (un jet-stream d'Est serait un jet négatif). Nous désignerons par γ_0 la valeur de γ sur l'axe, et de façon générale l'indice zéro sera utilisé pour désigner la valeur de toute grandeur sur cet axe: en particulier la demi-discontinuité de ζ sera donc représentée par σ_0 . Un profil typique de jet simple positif est fourni par la courbe A de la figure 1. L'équation d'un tel profil dans chacun des deux courants peut être obtenue à partir de l'expression (7) de ζ : l'intégration de cette équation par rapport à ω donne en effet, lorsque ζ est supposé indépendant de γ ,

$$\begin{aligned} \omega = \omega_0 + \gamma_0 \frac{\text{ch } \gamma_0}{\text{ch } \gamma} \text{sh } (\gamma - \gamma_0) + \\ + \omega_0 \frac{\text{sh}^2 (\gamma - \gamma_0)}{\text{ch}^2 \gamma_0} \end{aligned} \quad (17)$$

où ω_0 et γ_0 sont les deux constantes d'intégration, égales respectivement aux valeurs de ω et de γ sur l'axe et dans le courant considéré (on a d'ailleurs $\gamma_0 = 2 \omega_0 \text{th } \gamma_0 - \zeta$). Une autre expression équivalente de ω est

$$\omega = \omega_0 + \frac{\gamma_0}{2} \text{sh } 2 (\gamma - \gamma_0) + \frac{F_0'}{2} \text{sh}^2 (\gamma - \gamma_0) \quad (18)$$

où $F_0' = (2\omega_0/\text{ch}^2 \gamma_0) + 2\gamma_0 \text{th } \gamma_0$ désigne la valeur de $\partial F/\partial \gamma$ sur l'axe, d'ailleurs peu différente de $\beta_0 r_0$ (on a en effet $\beta_0 r_0 = 2\Omega/\text{ch}^2 \gamma_0$). La formule (17) montre que le profil d'un jet simple est complètement déterminé lorsqu'on se donne le point sur l'axe (point anguleux) et les deux tangentes en ce point, ce qui fait au total 4 paramètres indépendants. Notons aussi que la discontinuité de γ sur l'axe est opposée à celle de ζ :

$$\Delta_0 \gamma = -\Delta_0 \zeta = -2 \sigma_0 \quad (19)$$

comme cela résulte immédiatement de la formule (7).

Les solutions de l'équation d'onde (12) qui s'annulent à l'infini et qui sont en outre continues sur l'axe sont de la forme

$$\psi = \psi_0 e^{-n|\gamma - \gamma_0|} \quad (20)$$

De là on tire la discontinuité de ψ sur l'axe, $\Delta_0 \psi = -2n\psi_0$, et par suite la seconde des conditions (13) fournit la relation simple

$$N_0 = \sigma_0 \quad (21)$$

Comme on a d'autre part $N_0 = n (\omega_0 - \alpha)$, on en déduit la formule de dispersion suivante, donnant la vitesse de phase angulaire α en fonction de n ou λ considérés comme pouvant varier de façon continue:

$$\alpha = \omega_0 - (\sigma_0/n) = \omega_0 - \sigma_0 \lambda \quad (22)$$

Cette expression étant linéaire, toutes les ondes sont stables, et leur spectre de propagation (donnant la partie réelle de α en fonction de λ ,

pour $\lambda > 0$) est donc une portion de droite, ou plus exactement c'est l'ensemble des points de cette droite qui correspondent aux valeurs entières positives de $n = 1/\lambda$. On remarque que la formule de dispersion ne dépend que des deux paramètres ω_0 et σ_0 , et non de quatre comme le jet simple lui-même.

Il y a accord de phase, au signe près de l'amplitude, pour tous les éléments du mouvement ondulatoire le long de chaque méridien, et on déduit de la formule (11) l'expression suivante pour p :

$$p = \varrho R [\zeta_0 \pm n(\omega - \omega_0)] \psi \quad (23)$$

où ζ désigne la demi-somme des valeurs de ζ sur l'axe, et où le signe à adopter est celui de $(\gamma_0 - \gamma)$.

2. Jet double

Conformément à la convention indiquée précédemment, nous désignerons par «jet double» tout système de 3 courants du type considéré dans cette étude, et par «axes» de ce jet les deux lignes de séparation des courants. Nous dirons qu'un axe est positif ou négatif suivant le signe de σ sur cet axe, et nous dirons que le jet double est positif, négatif ou mixte, suivant que ses axes sont tous deux positifs, tous deux négatifs, ou de signes contraires. Nous désignerons par γ_0 et γ_1 les valeurs de γ sur les axes (ces mêmes notations serviront pour désigner les axes eux-mêmes), par d l'écart $|\gamma_0 - \gamma_1|$ ou «pseudo-largeur» du courant médian, et de façon générale par les indices 0 et 1 les valeurs d'une grandeur sur γ_0 et γ_1 respectivement, tandis que les indices a , b et c seront utilisés pour les trois courants respectivement, ces courants étant supposés rangés dans le sens de γ_0 vers γ_1 .

Si on prolonge le courant médian au delà de l'axe γ_1 par exemple, on obtient un jet simple d'axe γ_0 , et de même son prolongement au delà de γ donne un jet simple d'axe γ_1 : ces deux jets simples sont ce que nous appellerons les «jets simples composants» du jet double considéré. On ne peut pas les choisir arbitrairement, car le profil de chacun d'eux doit satisfaire à la condition de passer par le point angulaire du profil de l'autre, donc un jet double dépend au total de six paramètres indépendants. Les spectres de propagation des

jets composants, constitués par deux droites D_0 et D_1 , seront appelés «spectres composants» du jet double.

Cela posé, on établit facilement que toute solution de l'équation d'onde qui s'annule à l'infini et qui vérifie en outre les deux conditions (13) sur l'axe γ_1 par exemple, est donnée par les formules

$$\left. \begin{aligned} \psi_a &= \psi_0 e^{-n|\gamma - \gamma_0|} ; & \psi_c &= \psi_1 e^{-n|\gamma - \gamma_1|} \\ \psi_b &= \psi_1 \left(\frac{\sigma_1}{N_1} e^{-n|\gamma - \gamma_1|} + \frac{N_1 - \sigma_1}{N_1} e^{n|\gamma - \gamma_1|} \right) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Si nous écrivons ensuite que les conditions sur γ_0 sont satisfaites, nous obtenons deux relations que nous pouvons mettre sous la forme

$$\frac{N_0 \psi_1}{N_1 \psi_0} = \frac{\sigma_0 e^{-nd}}{N_1 - \sigma_1} = \frac{N_0 - \sigma_0}{\sigma_1 e^{-nd}} \quad (25)$$

De là nous tirons la relation suivante, qui généralise (21):

$$(N_0 - \sigma_0)(N_1 - \sigma_1) = \sigma_0 \sigma_1 e^{-2nd} \quad (26)$$

et en remplaçant N_0 et N_1 par leurs expressions en fonction de α on en déduit l'équation de dispersion des ondes, qui est cette fois du second degré. Il nous sera commode d'écrire cette équation sous la forme

$$\left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\sigma_0} \right) \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma_1} \right) - \frac{e^{-2nd}}{n^2} = 0 \quad (27)$$

où α_0 et α_1 représentent les vitesses de propagation des ondes des jets composants, données par les formules

$$\alpha_0 = \omega_0 - (\sigma_0/n); \quad \alpha_1 = \omega_1 - (\sigma_1/n) \quad (28)$$

et qui sont représentées respectivement par D_0 et D_1 lorsqu'on porte λ en abscisse.

On voit que le spectre de propagation du jet double, défini par l'équation (27), est complètement déterminé lorsqu'on se donne les spectres composants D_0 et D_1 , et en outre le paramètre d , donc le spectre dépend de cinq paramètres au lieu de six. Voici maintenant plusieurs propriétés que l'on établit aisément:

1°) Le système $D_0 D_1$ constitue la forme limite du spectre de propagation lorsque, ces droites restant fixes, d devient infini.

2°) Le spectre est tangent à D_0 et D_1 sur l'axe des α , avec un contact d'ordre infini.

3°) Le spectre et ses composantes possèdent le même diamètre D relatif à la direction de l'axe des α , ce diamètre ayant pour équation

$$\alpha = \frac{1}{2} (\alpha_0 + \alpha_1) \quad (29)$$

4°) Si sans changer d on intervertit D_0 et D_1 , le spectre n'est pas modifié, et si on remplace le système $D_0 D_1$ par son symétrique par rapport à une parallèle à l'axe des λ , le spectre tout entier subit la même transformation.

5°) Le spectre admet en général deux asymptotes ayant D pour diamètre, et dont l'une est parallèle à l'axe des λ et a pour ordonnée

$$\alpha_\infty = \frac{\sigma_0 \sigma_1}{\sigma_0 + \sigma_1} \left(\frac{\omega_0}{\sigma_0} + \frac{\omega_1}{\sigma_1} - 2d \right) \quad (30)$$

Dans le cas particulier où $\sigma_0 + \sigma_1 = 0$ (D est alors un axe de symétrie), on a deux branches paraboliques.

L'équation (27) étant du second degré, fournit deux valeurs de α pour chaque longueur d'onde, et dans certains cas ces valeurs peuvent être imaginaires conjuguées, ce qui correspond à des ondes instables ou amorties. Quatre cas sont à distinguer, suivant le signe de $\sigma_0 \sigma_1$ et celui de l'abscisse λ_D du point d'intersection de D_0 et D_1 , donnée par la formule

$$\lambda_D = \frac{\omega_0 - \omega_1}{\sigma_0 - \sigma_1} \quad (31)$$

Lorsqu'on a $\lambda_D > 0$, les ondes des deux jets composants ont la même vitesse de propagation pour $\lambda = \lambda_D$.

1er cas: $\sigma_0 \sigma_1 > 0$; $\lambda_D < 0$ (fig. 1, courbe a). Les racines de (27) sont manifestement réelles quelque soit n et comprennent α_0 et α_1 dans leur intervalle, donc on a deux familles d'ondes stables, et le spectre de propagation (fig. 2a) se compose de deux courbes distinctes séparées par D_0 , D_1 et D , et possédant chacune une branche infinie hyperbolique. En outre chaque courbe a pour position limite, pour d infini, la droite D_0 ou D_1 à laquelle elle est tangente, et elle est constamment inclinée dans le même sens que cette droite par rapport aux axes λ et α , ce qu'on peut établir de la façon suivante:

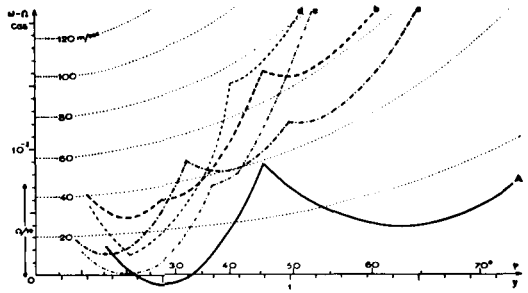


Fig. 1. Profils méridiens de systèmes de courants à tourbillon vertical uniforme: A = jet simple; a, b = jets doubles positifs; c, d = jets doubles mixtes.

L'équation (27) étant écrite sous la forme

$$\sqrt{b_0 b_1} = e^{-nd/n}, \text{ où } b_0 = \frac{\alpha - \alpha_0}{\sigma_0}; b_1 = \frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma_1} \quad (32)$$

sa dérivation par rapport à n donne

$$\frac{2n^2}{\sigma_0 \sigma_1} \left(\alpha - \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial n} = b_0 + b_1 - 2\sqrt{b_0 b_1} (1 + nd) e^{-nd} \quad (33)$$

Si les deux quantités de même signe b_0 et b_1 sont négatives, cette relation prouve directement que le premier membre est négatif, et si elles sont positives on en déduit, en remarquant que l'on a $1 + nd < e^{nd}$,

$$\frac{2n^2}{\sigma_0 \sigma_1} \left(\alpha - \frac{\alpha_0 + \alpha_1}{2} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial n} > (\sqrt{b_0} - \sqrt{b_1})^2 \quad (34)$$

donc cette fois le premier membre est positif.

Comme les trois quantités b_0 , b_1 et $\alpha - \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1)$ ont nécessairement un signe bien déterminé pour chacune des courbes du spectre, et comme ce signe ne varie pas lorsque d varie et que D_0 et D_1 demeurent fixes, on en déduit que la pente de chaque courbe est de même signe que celle de sa position limite pour d infini, c'est-à-dire que celle de D_0 et D_1 .

Il nous sera commode de désigner par les termes «ondes supérieures» et «ondes inférieures» les ondes relatives respectivement à la courbe supérieure et à la courbe inférieure du spectre de propagation.

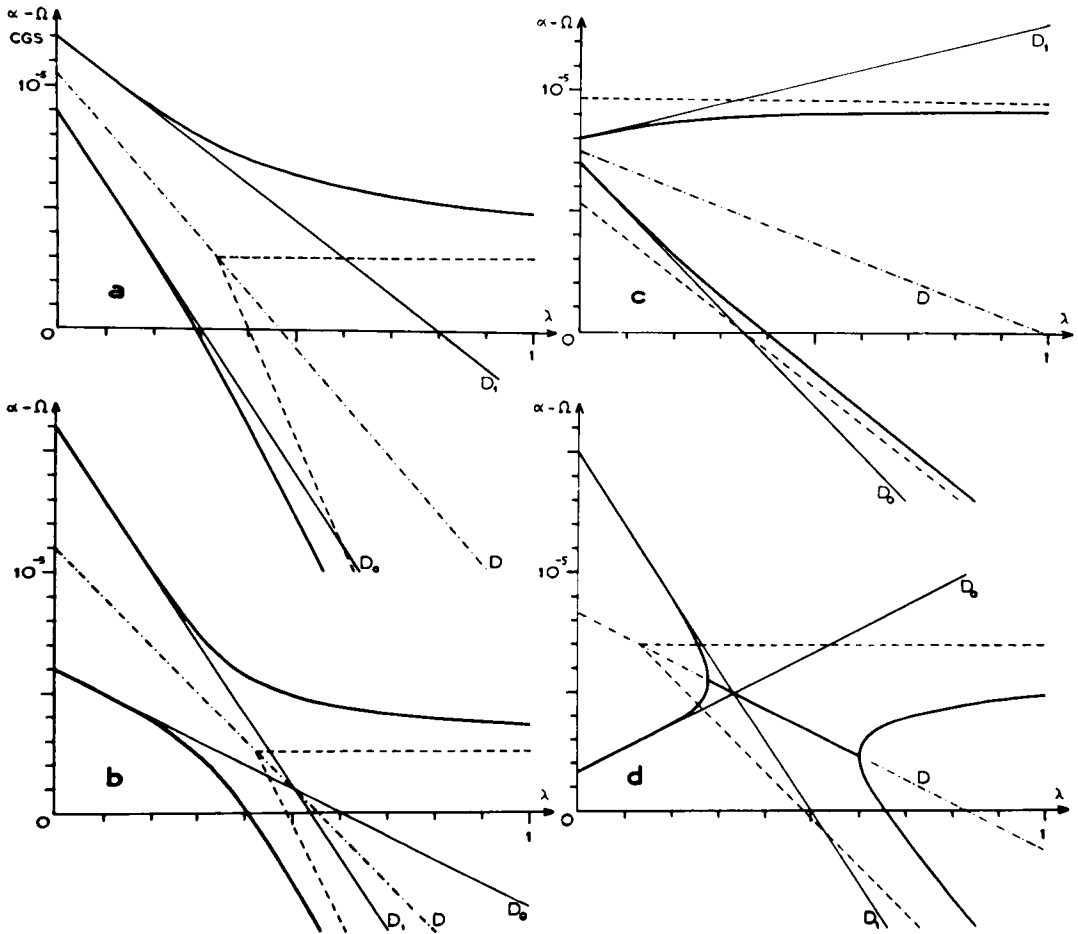


Fig. 2. Spectres de propagation des ondes des systèmes de courants a, b, c, d de la fig. 1.: spectres en trait continu fort, spectres composants D_0 et D_1 en trait continu faible, asymptotes en trait interrompu, axes de symétrie oblique en trait ponctué.

2ème cas: $\sigma_0 \sigma_1 > 0$; $\lambda_D > 0$ (fig. 1, courbe b).

Le seul changement par rapport au cas précédent consiste dans le fait que, pour d infini, la position limite de chacune des courbes du spectre de propagation (fig. 2b) est constituée, non plus par D_0 ou D_1 , mais par l'une des lignes brisées formées par le système de ces deux droites d'un même côté du diamètre D , de sorte que lorsque d est grand le spectre présente une très forte courbure au voisinage de la longueur d'onde λ_D .

3ème cas: $\sigma_0 \sigma_1 < 0$; $\lambda_D < 0$ (fig. 1, courbe c) = *Jet mixte du type stable*.

Dans ce cas, le profil méridien a une forme

nettement différente de celle des cas précédents; malgré cela on a encore deux familles d'ondes stables quelque soit la longueur d'onde, mais cette fois les deux racines de (27) sont comprises entre α_0 et α_1 . Le spectre de propagation (fig. 2c) se compose de deux courbes distinctes ayant chacune une branche infinie et chacune tangente à D_0 ou D_1 . Le fait qu'il n'y a pas de racines imaginaires s'établit facilement à partir de la propriété sur le signe de la pente démontrée dans l'étude du premier cas et qui est générale: les deux courbes devant toujours être inclinées en sens inverse, puisqu'il en est ainsi de D_0 et D_1 , sont toujours nécessairement séparées par le système des deux parallèles à l'axe des λ d'équations $\alpha = \omega_0$ et $\alpha = \omega_1$, et

par suite elles ne peuvent pas se couper; or si α pouvait être imaginaire l'équation (27) aurait une racine double pour certaines valeurs de λ .

4^{ème} cas: $\sigma_0 \sigma_1 < 0$; $\lambda_D > 0$ (fig. 1, courbe d) = *Jet du type instable*.

Ce cas est le plus intéressant car c'est lui qui nous conduira à une théorie des ondes de cyclone. En effet il existe alors une bande spectrale d'ondes instables entourant la longueur d'onde λ_D , car pour $\lambda = \lambda_D$ on a $\alpha_0 = \alpha_1$ et les racines de (27) sont visiblement imaginaires.

La propriété sur le signe de la pente du spectre permet d'ailleurs d'établir facilement que la bande spectrale d'instabilité est unique et que sa largeur croît régulièrement à partir d'une valeur nulle lorsque d décroît à partir de $+\infty$. Ce même résultat peut aussi s'obtenir en discutant le signe du déterminant de l'équation (27) qui est alors égal au produit des deux facteurs réels $\alpha_0 - \alpha_1 \pm 2\sqrt{-\sigma_0 \sigma_1} (e^{-nd}/n)$, et on trouve en outre que la bande d'ondes instables a en général une largeur finie, sauf si on a $\sigma_0 + \sigma_1 = 0$ et en outre $d < \lambda_D$.

Le spectre de propagation (fig. 2d) comprend encore en général deux courbes distinctes, séparées par l'intervalle d'instabilité, mais c'est la même courbe qui est ici tangente à D_0 et D_1 , l'autre courbe possédant les deux branches infinies (dans le cas particulier que nous venons de mentionner, cette dernière branche cesse d'exister); en outre le spectre doit être complété, dans l'intervalle d'instabilité, par la portion du diamètre D joignant les sommets des deux courbes précédentes.

Remarque. — Dans tout ce qui précède nous avons supposé que n était un paramètre pouvant varier de façon continue de 0 à $+\infty$, alors qu'en fait il ne peut prendre que des valeurs entières. Il en résulte en particulier que dans le dernier des cas considérés il n'existe effectivement des ondes instables que si la bande spectrale d'instabilité est assez large pour contenir au moins un nombre d'onde entier. Toutefois nous verrons que cette restriction est sans conséquence pour la théorie des ondes de cyclone.

Jet quasi-simple.

Si l'une des deux discontinuités du tourbillon est petite, σ_0 par exemple, le jet double est

voisin du jet simple composant J_1 d'axe γ_1 , et nous dirons alors que c'est un jet «quasi-simple», d'axe principal γ_1 et d'axe secondaire γ_0 . Dans ce cas on a approximativement $\lambda_D = \lambda_0$, en posant

$$\lambda_0 = (\omega_1 - \omega_0)/\sigma_1 \quad (35)$$

et si le jet est du type instable, ce qui est le cas si on a $\sigma_0 \sigma_1 < 0$ et $\lambda_0 > 0$, la bande spectrale d'instabilité est étroite, donc si on emprunte le langage de la spectroscopie on peut dire qu'elle constitue une *raie spectrale*.

Dans le cas particulier où σ_0 est suffisamment petit pour que l'on puisse écrire

$$\sqrt{\sigma_0} \leq \sqrt{\sigma_1} e^{-n_0 d} \quad (n_0 = 1/\lambda_0) \quad (36)$$

on obtient des formules simples pour la forme de cette raie: si on désigne par $\delta\lambda$ sa demi-largeur et par S_0 la valeur du coefficient d'amplification en son centre λ_0 , où il est maximum, on a en effet

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda_0} = 2 \sqrt{\frac{-\sigma_0}{\sigma_1}} e^{-n_0 d}; \quad S_0 = \sqrt{-\sigma_0 \sigma_1} e^{-n_0 d} \quad (37)$$

La première de ces formules montre que, pour toutes les ondes instables, on a $\lambda - \lambda_0 \leq \lambda_0 e^{-2n_0 d}$. Inversement, si cette dernière condition est satisfaite en même temps que la condition (36), et si l'on introduit les variables réduites

$$\xi = \sigma_1 \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}; \quad \tau = \sigma_0 \sigma_1 e^{-2n_0 d} \quad (38)$$

on trouve que, quelque soit le signe de $\sigma_0 \sigma_1$, les deux valeurs de N_0 et celles de $(N_1 - \sigma_1)$ qui correspondent à une longueur d'onde donnée s'expriment uniquement à l'aide de ces deux paramètres par les formules

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{\xi}{2} \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \tau}; \quad N_1 - \sigma_1 = \\ &= N_0 - \xi = -\frac{\xi}{2} \pm \sqrt{\frac{\xi^2}{4} + \tau} \end{aligned} \quad (39)$$

donc ces deux quantités sont petites par rapport à $\sigma_1 e^{-2n_0 d}$, et on voit en outre qu'au voisinage de la longueur d'onde λ_0 le spectre de propagation est assimilable à une hyperbole ayant D_0 et D_1 pour asymptotes, et que la courbe donnant le coefficient d'amplification des ondes

instables en fonction de la longueur d'onde est assimilable à un demi-cercle. Enfin des formules (15) et (39) on déduit, pour la discontinuité de glissement $\Delta_0 u$ sur l'axe secondaire γ_0

$$\Delta_0 u / \nu_0 = 2 (N_1 - \sigma_1) / i \sigma_1 e^{-2n_0 d} \ll 1 \quad (40)$$

ce qui montre que cette discontinuité de glissement est négligeable, et en outre pour $\lambda = \lambda_0$ on a

$$\Delta_0 u / \nu_0 = \pm 2 i \sqrt{\sigma_0 / \sigma_1} e^{n_0 d} \quad (41)$$

donc dans ce cas $\Delta_0 u$ tend vers zéro en même temps que σ_0 . Nous verrons l'importance de ce résultat lorsque nous considérerons l'effet de la viscosité. Le fait que la discontinuité de glissement est très petite sur l'axe secondaire permet également de conclure que, lorsque la condition (36) est satisfaite, le mouvement ondulatoire correspondant à chacune des ondes instables d'un jet quasi-simple est très peu différent de celui d'une onde du jet simple J_1 ayant la même longueur d'onde.

3. Généralisations

1°) Pour un jet multiple (système d'un nombre de courants supérieur à deux) l'équation de dispersion des ondes est algébrique en α et son degré est égal au nombre des axes. Ainsi pour un jet triple ou système de quatre courants, comportant par conséquent trois axes $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$, on obtient l'équation du troisième degré

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\sigma_0} \right) \left(\frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma_1} \right) \left(\frac{\alpha - \alpha_2}{\sigma_2} \right) - \frac{1}{n^2} \cdot \\ & \cdot \left(\frac{\alpha - \alpha_0}{\sigma_0} e^{-2n d_0} + \frac{\alpha - \alpha_1}{\sigma_1} e^{-2n d_1} + \frac{\alpha - \alpha_2}{\sigma_2} e^{-2n d_2} \right) + \\ & + \frac{2}{n^3} e^{-n(d_0 + d_1 + d_2)} = 0 \end{aligned} \quad (42)$$

où $d_0 = |\gamma_1 - \gamma_2|$; $d_1 = |\gamma_2 - \gamma_0|$; $d_2 = |\gamma_0 - \gamma_1|$, et où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ désignent les vitesses de propagation des ondes des trois jets composants d'axes $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ respectivement.

2°) Si un jet triple a ses trois discontinuités de même signe, toutes ses ondes sont stables.

Supposons par exemple que, dans le jet

triple précédent, σ_0, σ_1 , et σ_2 soient tous trois positifs. On peut toujours, vu l'interchangeabilité des indices, supposer que l'on a $\gamma_0 < \gamma_1 < \gamma_2$ par exemple, de sorte que si l'on prolonge le courant compris entre γ_1 et γ_2 au delà de γ_2 , on obtient un jet double positif d'axes γ_0 et γ_1 , dont les ondes vérifient l'équation de dispersion (27). Comme il s'agit d'un jet positif, cette équation a ses deux racines réelles et distinctes, et si α' est la plus petite et α'' la plus grande, nous savons que l'on a $\alpha' < \alpha_0$; $\alpha' < \alpha_1$; $\alpha'' > \alpha_0$ et $\alpha'' > \alpha_1$. Si $f(\alpha)$ désigne le premier membre de (42), on établit facilement d'autre part, en utilisant la formule (32), que l'on a

$$\begin{aligned} f(\alpha') &= \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{\frac{\alpha_0 - \alpha'}{\sigma_0}} e^{-n d_0} + \sqrt{\frac{\alpha_1 - \alpha'}{\sigma_1}} e^{-n d_1} \right)^2 > 0 \\ f(\alpha'') &= - \frac{1}{n^2} \left(\sqrt{\frac{\alpha'' - \alpha_0}{\sigma_0}} e^{-n d_0} - \sqrt{\frac{\alpha'' - \alpha_1}{\sigma_1}} e^{-n d_1} \right)^2 < 0 \end{aligned} \quad (43)$$

et comme on a $f(-\infty) < 0$ et $f(+\infty) > 0$, on en déduit que les racines de (42) sont bien toutes trois réelles, et qu'en outre elles sont alternées avec celles de (27).

Cette propriété s'étend par récurrence à un jet multiple quelconque dont toutes les discontinuités du tourbillon sont de même signe.

3°) Si l'une des discontinuités σ_0 d'un jet triple d'axes $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ est supposée petite, le jet triple est voisin du jet double J_{12} défini par les six paramètres $\gamma_1, \gamma_2, \omega_1, \omega_2, \sigma_1, \sigma_2$: nous dirons que c'est un jet «quasi-double» d'axes principaux γ_1 et γ_2 et d'axe secondaire γ_0 . Dans le cas où σ_1 et σ_2 sont de même signe, et où σ_0 est de signe contraire, il peut exister des raies spectrales d'ondes instables, au nombre de deux au maximum, et dont les longueurs d'onde centrales sont fournies par l'intersection du spectre de propagation des ondes du jet J_{12} avec la parallèle à l'axe des λ d'équation $\alpha = \omega_0$. Pour chacune des ondes instables la vitesse de propagation est voisine de la vitesse du vent à la latitude de l'axe secondaire γ_0 .

et en outre la discontinuité de glissement sur cet axe est très petite, de sorte que le mouvement ondulatoire est peu différent de celui d'une onde du jet J_{12} ayant la même longueur d'onde.

Ces résultats peuvent être étendus à un jet multiple quelconque dont l'une des discontinuités est petite et de signe contraire à toutes les autres supposées de même signe.

IV. Effet de la viscosité

Avant d'appliquer les résultats précédents, il est indispensable d'examiner quel peut être l'effet de la viscosité turbulente sur les ondes obtenues. En effet, même si cette viscosité est faible, ce qu'il est permis d'admettre en ce qui concerne la couche barotrope, il est bien comme que son rôle peut être néanmoins prépondérant lorsque la vitesse de propagation des ondes est voisine de la vitesse du vent au voisinage d'une discontinuité de glissement, où les forces de viscosité sont nécessairement très grandes. Notons d'ailleurs que si $\alpha = \omega$, c'est-à-dire si $N = 0$, l'équation générale (9) comporte un point singulier, donc pour avoir une solution déterminée et physiquement possible il est nécessaire de faire intervenir la viscosité (ou tout autre facteur de dissipation) au voisinage de la valeur correspondante de γ , ainsi que l'a montré KUO (1949 et 1950). Toutefois si $\partial\zeta/\partial\gamma = 0$, comme nous l'avons supposé, de tels points singuliers cessent d'exister, de sorte que seul est à considérer le voisinage des axes (c'est là encore un avantage de l'hypothèse que ζ est uniforme).

Afin de rendre le problème accessible au calcul, nous allons supposer que la viscosité turbulente est du même type que la viscosité moléculaire, caractérisée par un certain coefficient cinématique ν . On trouve alors que la formule (11) donnant la perturbation de la pression doit être remplacée par

$$\frac{p}{\rho R} = \left[\frac{r}{n} (N + i\nu \nabla^2) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \gamma} + \zeta \right] \psi \quad (44)$$

et que si ν est une constante, ce que l'on peut supposer au voisinage d'un axe du jet-stream, l'équation du tourbillon devient $D\zeta/Dt = \nu \Delta^2 \zeta$, ce qui conduit à l'équation différen-

tielle suivante pour ψ , à substituer à (9), et qui est cette fois du quatrième ordre:

$$\left[(N + i\nu \nabla^2) \nabla^2 + \frac{n}{r^2} \frac{\partial \zeta}{\partial \gamma} \right] \psi = 0 \quad (45)$$

Comme nous supposons ζ indépendant de γ , cette équation se réduit à

$$(N + i\nu \nabla^2) \nabla^2 \psi = 0 \quad (46)$$

D'autre part les conditions aux limites sur les axes doivent être également modifiées: on doit exprimer d'une part la continuité de u et v , et d'autre part celle des deux composantes horizontales de la tension de viscosité exercée le long de l'axe considéré par l'un des courants sur l'autre, ce qui fournit quatre conditions au lieu de deux. Si on tient compte de (8) et de (44), on trouve que ces conditions sont équivalentes aux suivantes:

$$\begin{aligned} \Delta \psi = 0; \quad \Delta \left(\frac{\partial \psi}{\partial \gamma} \right) &= 0; \quad \Delta \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \gamma^2} \right) = 0; \\ \Delta \left(\frac{\partial^3 \psi}{\partial \gamma^3} \right) &= 2i \frac{r^2 n \sigma}{\nu} \psi \end{aligned} \quad (47)$$

1. *Jet simple.* — Lorsque ν est très petit, la modification du mouvement par la viscosité est localisée dans une «zone de frottement» très étroite entourant l'axe γ_0 , donc dans cette zone on peut considérer ν , r et N comme des constantes ($\nu = \nu_0$, $r = r_0$; $N = N_0$). L'équation (46) devient ainsi une équation à coefficients constants, qui avec les conditions (47) redonne la formule $N_0 = \sigma_0$ obtenue pour $\nu = 0$, moyennant la condition

$$\left(\frac{k_0^2 \nu_0}{\sigma_0} \right)^{\frac{1}{2}} \ll 1 \quad (48)$$

où l'on pose $k_0 = n/r_0 = 2\pi/L_0$, L_0 étant la longueur d'onde linéaire à la latitude de l'axe. En outre les solutions obtenues indiquent que dans la zone de frottement la quantité $n(\gamma - \gamma_0)$ est de l'ordre du premier membre de (48), donc la largeur de cette zone augmente si on fait croître ν_0 sans faire varier k_0 et σ_0 , et alors il arrive forcément un moment où N ne peut plus être considéré comme une constante dans la zone de frottement. Pour déterminer à quel moment cela se produit, nous remarquons que,

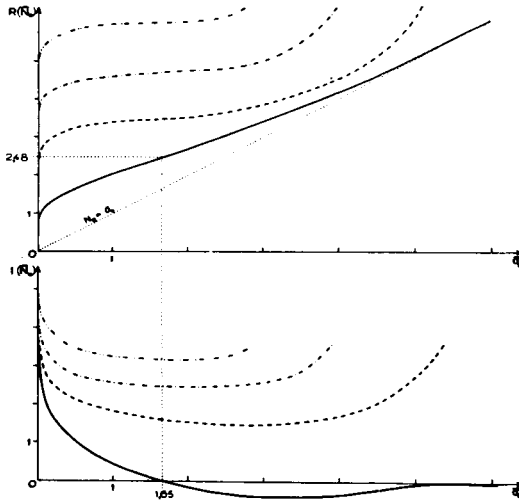


Fig. 3. Effet de la viscosité sur les ondes d'un jet simple lorsque la discontinuité du tourbillon est petite : courbes de propagation (graphique supérieur) et d'amortissement (graphique inférieur).

d'après (18), ou peut écrire au voisinage de l'axe, dans chacun des deux courants,

$$N = N_0 + \gamma_0 n (\gamma - \gamma_0) + \frac{1}{2} F_0' n (\gamma - \gamma_0)^2 \quad (49)$$

γ_0 étant la valeur de γ sur l'axe dans le courant considéré, de sorte que nous avons à chercher quand le second ou le troisième terme de ce développement devient comparable à σ_0 . Comme $n(\gamma - \gamma_0)$ est de l'ordre de $(k_0^2 \nu_0 / \sigma_0)^{1/2}$, et comme d'autre part F_0' diffère peu de $\beta_0 r_0$, nous voyons ainsi que c'est lorsque ν_0 devient comparable à l'une des deux quantités $\sigma_0^3 / \gamma_0^2 k_0^2$ ou $\sigma_0^2 / \beta_0 k_0$. Or, avec les ordres de grandeur usuels suivants (en c. g. s.):

$$\sigma_0 \sim 10^{-5}; \quad \gamma_0 \sim 10^{-5}; \quad \beta_0 \sim 10^{-13}; \quad k_0 \sim 10^{-8}$$

ces deux quantités sont de l'ordre de 10^{11} , ce qui est très grand pour une viscosité turbulente dans la couche barotrope. En conséquence, nous pouvons dire que dans le cas d'un jet simple normal l'effet de la viscosité sur l'équation de dispersion des ondes est négligeable, et que cet effet se réduit à une modification du mouvement dans une couche de frottement très étroite (comparée à la longueur d'onde).

Naturellement cette conclusion cesse d'être

correcte si σ_0 ou γ_0 est nettement inférieur à l'ordre de grandeur 10^{-5} , et si σ_0 devient très petit l'effet de la viscosité doit au contraire être prépondérant et produire un amortissement des ondes qui augmente indéfiniment lorsque σ_0 tend vers zéro: en effet à limite on a un courant unique où ζ est uniforme, donc l'équation différentielle (46), qui est du quatrième ordre, n'admet aucune solution non nulle s'annulant à l'infini et qui soit partout continue, en d'autres termes il ne peut y avoir aucune onde du type considéré. Pour préciser ce résultat, supposons que γ_0 conserve l'ordre de grandeur 10^{-5} , et que seul σ_0 soit petit; alors, comme les deux valeurs de γ_0 diffèrent de $2\sigma_0$, on peut considérer que ces deux valeurs sont égales, et on trouve que la viscosité intervient dans l'équation de dispersion des ondes lorsque σ_0 est au plus comparable à la quantité

$$\mu_0 = (\gamma_0^2 k_0^2 \nu_0)^{1/3} \quad (50)$$

qui est seulement de l'ordre de 10^{-5} au plus pour $\nu_0 = 10^5$, si on suppose $L_0 > 1.000$ km. En outre le développement (49) peut être limité à ses deux premiers termes, ce qui conduit pour (46) à une équation d'Orr-Sommerfeld, dont les solutions s'expriment à l'aide des fonctions de Bessel d'ordre $1/3$. En écrivant que les conditions aux limites sont satisfaites, on arrive finalement, compte tenu de l'ordre de grandeur des paramètres, à une équation qui ne dépend que des deux variables réduites

$$\bar{N}_0 = \frac{N_0}{\mu_0}; \quad \bar{\sigma}_0 = \frac{\sigma_0}{\mu_0} \quad (51)$$

et qui peut s'écrire

$$g(-i\bar{N}_0) = -\frac{i}{\bar{\sigma}_0} \quad (52)$$

où g est la fonction définie par

$$g(z) = \int_0^\infty \exp\left(z t - \frac{t^3}{3}\right) dt \quad (53)$$

Cette équation (52) détermine N_0 en fonction de $\bar{\sigma}_0$ par l'intermédiaire de $\bar{N}_0$; on trouve qu'elle admet une infinité de solutions, qui correspondent toutes à des ondes infiniment

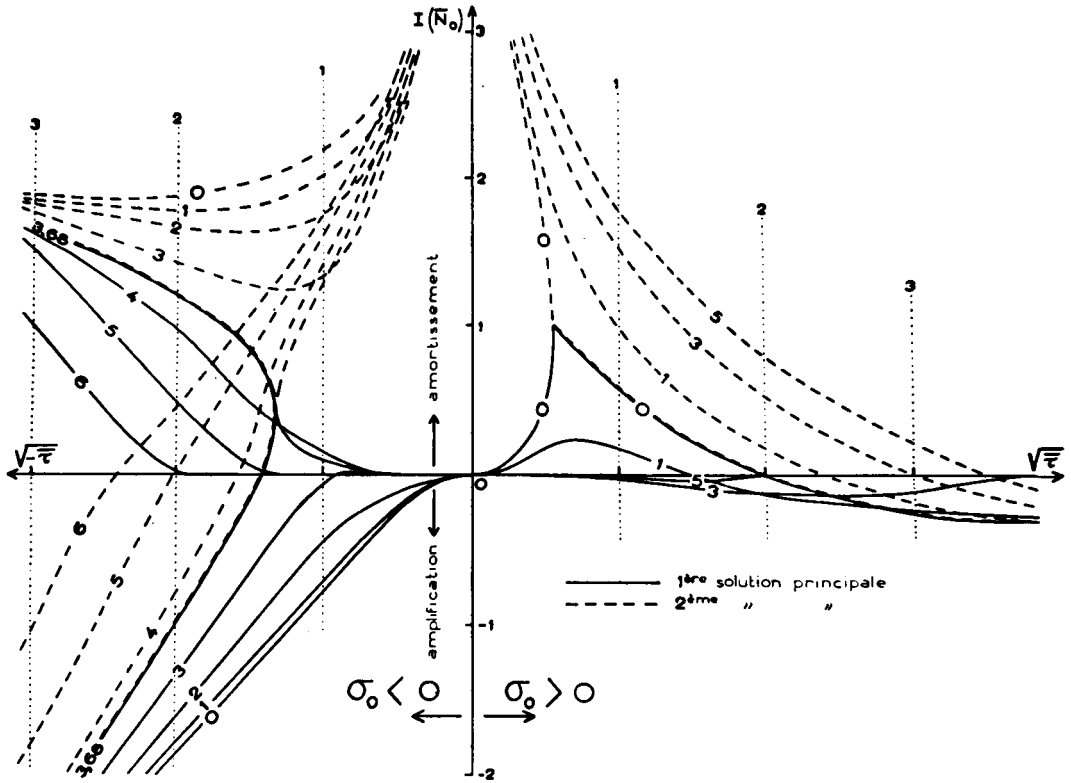


Fig. 4. Effet de la viscosité sur les ondes d'un jet quasi-simple pour les longueurs d'onde voisines de λ_0 : courbes d'amortissement $\bar{\xi} = \text{const}$, chiffrées suivant les valeurs de $\bar{\xi}$ (paramètre réduit proportionnel à l'écart $\lambda = \lambda_0$).

amorties lorsque $\bar{\sigma}_0 = 0$ et dont l'une d'elles (solution « principale ») est asymptotique à $N_0 = \sigma_0$ pour $\sigma_0 > \mu_0$. Certaines de ces solutions sont représentées en fonction de $\bar{\sigma}_0$ par les courbes de la fig. 3, dont la partie supérieure donne la partie réelle $R(\bar{N}_0)$, et la partie inférieure la partie imaginaire $I(\bar{N}_0)$, fournissant une valeur réduite du coefficient d'amortissement; la solution principale est figurée en trait continu, les autres solutions en traits diversement interrompus suivant la solution dont il s'agit. On voit que pour la solution principale les ondes sont amplifiées si l'on a $\bar{\sigma}_0 > 1,65$, mais que le coefficient d'amplification est très petit et pratiquement négligeable.

2. *Jet double* — Tout comme pour un jet simple, on établit que pour un jet double normal, où $\sigma_0, \sigma_1, \gamma_0$ et γ_1 sont tous de l'ordre de grandeur 10^{-5} c. g. s., l'effet de la viscosité

sur l'équation de dispersion des ondes est négligeable; au contraire cet effet consiste en général en un amortissement si par exemple l'une des demi-discontinuités σ_0 du tourbillon est très petite, auquel cas on a affaire à ce que nous avons appelé un jet quasi-simple. Toutefois ce dernier résultat comporte une exception importante, dans le cas où la longueur d'onde λ est voisine de la valeur λ_0 définie par (35) et qui, en l'absence de viscosité, constitue le centre de la raie spectrale des ondes instables éventuelles: on trouve en effet que, dans ce cas, l'équation qui détermine N_0 est d'un type autre que (52) et que, moyennant certaines conditions, elle peut se mettre sous la forme

$$g(-i\bar{N}_0) = \frac{i}{\bar{\tau}} (\bar{\xi} - \bar{N}_0) \quad (54)$$

dépendant des deux paramètres $\bar{\xi}$ et $\bar{\tau}$ défini par

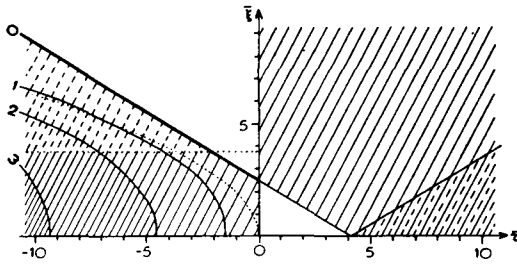


Fig. 5. Effet de la viscosité sur les ondes d'un jet quasi-simple, pour les longueurs d'onde voisines de λ_0 : courbes d'amplification $I(\bar{N}_0) = \text{const}$, chiffrées suivant les valeurs de $-I(\bar{N}_0)$.

Les hachures continues indiquent les domaines des ondes instables fournies par la première solution principale, les hachures interrompues ceux des ondes fournies par la seconde solution principale, et la parabole en pointillé représente la frontière du domaine des ondes instables pour une viscosité nulle.

$$\bar{\xi} = \frac{\xi}{\mu_0} = \frac{\sigma_1}{\mu_0} \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda}; \quad \bar{\tau} = \frac{\tau}{\mu_0} = \frac{\sigma_0 \sigma_1}{\mu_0^2} e^{-2n_0 d} \quad (55)$$

(ξ et τ sont définis par (38)).

Cette équation (54) admet encore une infinité de solutions, mais parmi elles il en existe une («première solution principale») qui devient identique à celle que nous avons obtenue en négligeant la viscosité dans le cas où σ_0 est petit par rapport à μ_0 , contrairement à ce qui se passe dans le cas général où l'on a alors, au contraire, un amortissement très grand. Ce résultat était d'ailleurs à prévoir, puisque nous avons établi dans le chapitre précédent (formule (41)) que la discontinuité de glissement tendait vers zéro en même temps que σ_0 , pour $\lambda = \lambda_0$. Donc, en particulier, l'effet de la viscosité sur les ondes instables d'un jet quasi-simple est pratiquement négligeable, résultat qui nous permettra d'appliquer sans aucune modification les formules du chapitre précédent à une théorie des ondes de cyclone. En plus de la première solution principale, il existe une autre solution de l'équation (54) («seconde solution principale») qui possède des propriétés asymptotiques intéressantes, sur lesquelles nous ne croyons pas utile d'insister ici. La fig. 4 donne les variations du coefficient d'amortissement réduit $I(\bar{N}_0)$ en fonction du paramètre $\sqrt{\tau}$ pour $\sigma_0 \sigma_1 > 0$ (partie droite de la figure), et en fonction de $\sqrt{-\tau}$ pour $\sigma_0 \sigma_1 < 0$

(partie gauche), pour diverses valeurs de $\bar{\xi}$ et pour les deux solutions principales, et la fig. 5 montre quel est l'effet de la viscosité sur la largeur de la raie spectrale d'ondes instables pour $\sigma_0 \sigma_1 < 0$. (On suppose $\sigma_1 > 0$).

V. Application aux centres d'action semi-permanents

Dans les chapitres précédents il n'a été question que des ondes libres du jet-stream, puisque nous avons supposé le mouvement strictement horizontal; mais il est bien connu que la théorie des ondes forcées d'un milieu fluide se rattache étroitement à celle de ses ondes libres: ainsi lorsque le fond d'une rivière peu profonde et de vitesse uniforme présente une petite dénivellation, il en résulte un système d'ondes de gravité forcées apparaissant à l'aval de la dénivellation et dont la longueur d'onde est égale à celle des ondes libres stationnaires, si toutefois la vitesse du courant est telle que de telles ondes existent. Il s'agit là d'un phénomène de résonance, que l'on retrouve à plus grande échelle lorsqu'on considère par exemple les ondes produites dans un courant atmosphérique par une chaîne de montagnes peu accidentée.

Si nous nous plaçons à l'échelle de la circulation générale, nous pouvons envisager de même des ondes forcées produites dans le jet-stream par les actions géographiques possédant cette échelle, ce qui nous conduit à une explication des ondes quasi-stationnaires associées aux centres d'action semi-permanents: c'est là le principe même de la théorie formulée par ROSSBY (1939), et nous voyons que le problème se ramène à la recherche des ondes libres du jet-stream qui sont stationnaires par rapport à la Terre, c'est-à-dire telles que l'on ait $\alpha = \Omega$, ce qui nous oblige à supposer que le jet-stream lui-même est stationnaire. Toutefois la résonance dont il s'agit ici n'est certainement pas aussi stricte que dans le cas des ondes forcées à la surface d'une rivière, de sorte qu'il suffit que α soit voisin de Ω , et non égal exactement à Ω , pour que l'on puisse observer dans l'atmosphère des ondes longues de grande amplitude; en d'autres termes, il suffit que les ondes soient très lentes, et non pas exactement stationnaires, et on peut supposer aussi que le jet-stream lui-même, au lieu d'être rigoureusement stationnaire, possède une certaine

évolution pourvu qu'elle ne soit pas trop rapide.

De façon générale, on obtient la condition pour qu'un jet-stream soit capable d'ondes stationnaires en remplaçant simplement α par Ω dans l'équation de dispersion des ondes de ce jet-stream, ce qui fournit par conséquent une certaine relation entre les différents paramètres qui le définissent, pour chaque valeur de n .

Avant d'appliquer ces considérations aux modèles de jet-stream étudiés précédemment, rappelons d'abord que, si on fait l'hypothèse d'un courant de vitesse uniforme et d'une courbure terrestre négligeable, de sorte que l'équation de propagation des ondes est la formule (16), on obtient pour les ondes stationnaires les formules classiques de Rossby

$$U = \frac{\beta r^2}{n^2} = \frac{\beta L^2}{4\pi^2} \quad (56)$$

où β et r sont assimilables à deux constantes, et où $L = 2\pi r/n$ désigne la longueur d'onde linéaire. En donnant à n les valeurs entières successives, on obtient ainsi la série des valeurs de U pour les courants capables d'ondes stationnaires, et on voit en outre que pour ces ondes U est proportionnel à L^2 , de sorte que la relation entre U et L est représentée par une parabole (A). Cette parabole a été construite sur la fig. 6a en supposant $\beta = 1,62 \times 10^{-13}$ c. g. s., valeur relative à la latitude de 45° .

1. *Jet simple*. — Si nous supposons le jet simple formé de deux courants du type considéré dans les chapitres antérieurs, nous devons appliquer la formule de propagation (22), d'où nous déduisons la condition de résonance suivante pour les ondes stationnaires:

$$\omega_0 - \Omega = \frac{\sigma_0}{n} \quad (57)$$

déjà donnée par PLATZMAN (1949) avec d'autres notations; si nous introduisons la vitesse linéaire sur l'axe, $U_0 = r_0(\omega_0 - \Omega)$, et la longueur d'onde linéaire mesurée à la latitude de cet axe, $L = 2\pi r_0/n$, nous déduisons de là des formules correspondant à (56),

$$U_0 = \frac{\sigma_0 r_0}{n} = \frac{\sigma_0 L}{2\pi} \quad (58)$$

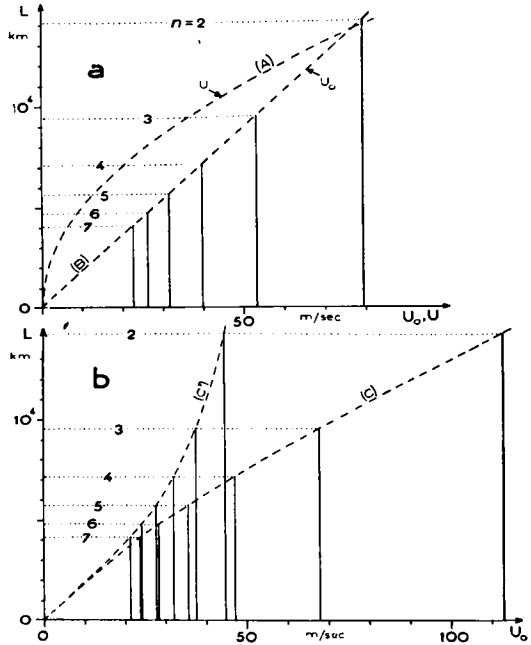


Fig. 6. Ondes stationnaires d'un jet simple (a) et d'un jet double (b), et comparaison avec la formule de Rossby: spectre de vitesse du jet-stream (portions de droites en trait continu) et relation entre la longueur d'onde et la vitesse du jet-stream (courbes en trait interrompu).

Ces formules indiquent que pour un jet positif ($\sigma_0 > 0$) on doit avoir $U_0 > 0$, autrement dit on doit avoir des vents d'Ouest au moins dans la partie centrale du jet, tout comme l'exige la formule de Rossby. D'autre part les coupes méridiennes publiées par CRESSMAN (1950) par exemple indiquent que pour un jet-stream dont l'évolution est lente peu différente de la valeur moyenne 3.5×10^{-5} c. g. s. sur chacun des axes, de sorte que le produit $\sigma_0 r_0$ varie lui-même très peu et peu être considéré comme une constante en première approximation. Les formules (58) fournissent alors une valeur bien déterminée de U_0 pour chaque nombre d'onde n , et indiquent en outre que pour les ondes stationnaires U_0 est proportionnel à la longueur d'onde L_1 et non plus à L^2 , donc la relation entre U_0 et L est représentée par une droite (B). Sur la figure 6a cette droite a été construite en supposant l'axe à la latitude de 45° , et en prenant pour σ_0 la valeur précédemment

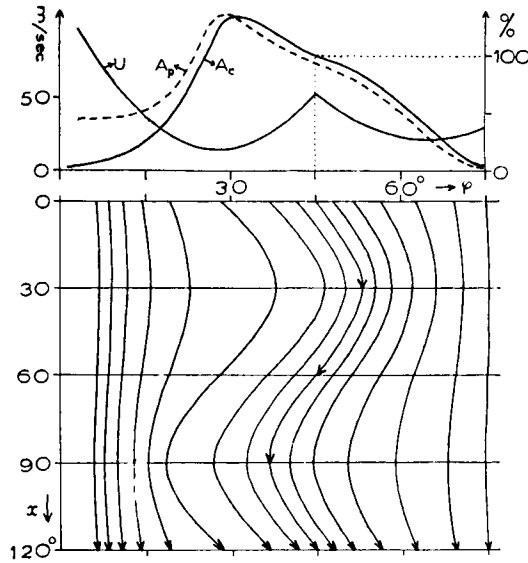


Fig. 7. Ondes stationnaires d'un jet simple ne comportant que des vents d'Ouest ($n = 3$).

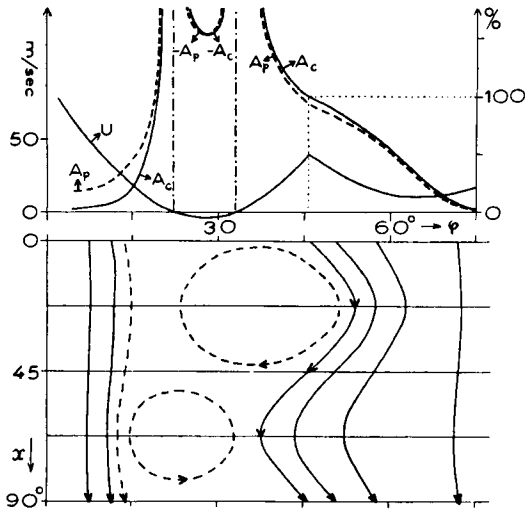


Fig. 8. Ondes stationnaires d'un jet simple comportant une zone tropicale de vents d'Est ($n = 4$).

indiquée; en outre les valeurs de U_0 correspondant aux valeurs entières successives de n sont mises en évidence sous la forme d'un «spectre de vitesse», constitué par des segments de parallèles à l'axe des L et se terminant sur la droite (B).

Les formules (58), associées à la formule de propagation (22), conduisent à des résultats qualitativement identiques à ceux obtenus par Rossby:

- (a) Les ondes stationnaires sont d'autant plus longues que le jet-stream est plus rapide, donc que l'indice zonal est plus élevé.
- (b) Pour un jet-stream donné, les ondes plus courtes que les ondes stationnaires se meuvent vers l'Est, les ondes plus longues vers l'Ouest.

En outre il est remarquable que la droite (B) est dans l'ensemble assez voisine de la parabole (A), ce qui signifie que les résultats déduits de l'hypothèse de Rossby sont également comparables quantitativement à ceux que donnent les formules (58).

L'aspect des lignes de courant stationnaires est donné par les fig. 7 et 8, pour deux jets simples particuliers: dans le premier cas on a $n = 3$, et le jet-stream ne comporte que des vents d'Ouest ($\sigma_0 = 3.5 \times 10^{-5}$; $\varphi_0 = 45^\circ$, d'où $U_0 = 52.6$ m/sec), tandis que dans le second cas, qui est celui du profil A de la fig. 1, on a $n = 4$, et une zone de vents

d'Est de part et d'autre du tropique ($\sigma_0 = 3.5 \times 10^{-5}$; $\gamma_0 = 0.9$, d'où $U_0 = 38.9$ m/sec). Dans les deux cas on a supposé que l'axe déformé qui coïncide avec une ligne de courant puisque le mouvement est stationnaire, a une demi-amplitude A_0 égale à 8 degrés de latitude, donc petite par rapport à la longueur d'onde conformément à l'hypothèse toujours faite jusqu'ici (cet axe déformé est indiqué par une suite de points de flèches sur les figures); en outre on a représenté, sur les parties supérieures, d'une part le profil du jet simple en coordonnées φ et U (courbe indiquée par «U»), et d'autre part les variations méridiennes de la demi-amplitude A_c des lignes de courant et de celle A_p des isobares, exprimées en pourcentage de A_0 , et dans l'hypothèse où ces demi-amplitudes sont infiniment petites.

Les formules donnant A_c et A_p sont, lorsque ces quantités peuvent être considérées comme comparables à A_0 ,

$$\frac{A_c}{A_0} = \frac{U_0}{U} e^{-n|\gamma - \gamma_0|}; \quad \frac{A_p}{A_c} = \frac{\zeta_0 \pm n(\omega - \Omega)}{(\omega + \Omega) \sin \varphi} \quad (59)$$

où le signe à prendre est celui de $(\gamma_0 - \gamma)$, d'où l'on déduit que A_c et A_p deviennent relativement grands lorsque U est petit, et cela explique pourquoi on trouve le maximum de

ces quantités, dans le cas de la fig. 7, non pas au voisinage de l'axe, mais plutôt au voisinage de la latitude où U est minimum, c'est-à-dire vers 30° . En outre dans le cas de la fig. 8, le fait que U s'annule à deux latitudes entraîne que A_c et A_p sont très grands à ces latitudes (théoriquement infinis), donc les lignes de courant et les isobares cessent d'être des sinusoides dans les régions tropicales, et prennent l'aspect de courbes fermées formant un chapelet d'anticyclones alternant avec des dépressions. Tout cela est bien conforme à ce qu'on observe, et par ces deux exemples on se rend compte aussi que, pour une même action perturbatrice, l'amplitude des ondes stationnaires est en moyenne d'autant plus grande que U est lui-même plus petit, donc que l'indice zonal est moins élevé, résultat déjà énoncé par Rossby sur une base purement empirique.

Enfin on voit sur les figures que A_c et A_p sont toujours assez peu différents, ce qui signifie que le mouvement est approximativement géostrophique (on a d'ailleurs exactement $A_p = A_c$ à la latitude où A_c est maximum, dans le cas où U est toujours positif).

2. *Jet double.* — Si on fait $\alpha = \Omega$ dans l'équation de dispersion (27), et si on introduit les vitesses U_0 et U_1 , sur les axes, on trouve comme condition pour qu'un jet double possède des ondes stationnaires

$$\left(\frac{U_0}{\sigma_0 r_0} - \frac{1}{n} \right) \left(\frac{U_1}{\sigma_1 r_1} - \frac{1}{n} \right) - \frac{e^{-2nd}}{n^2} = 0 \quad (60)$$

donc si n est donné on obtient une relation entre les trois paramètres $U_0/\sigma_0 r_0$, $U_1/\sigma_1 r_1$ et d . Ainsi que nous l'avons déjà dit, les produits $\sigma_0 r_0$ et $\sigma_1 r_1$ sont peu variables pour un jet-stream qui évolue lentement, de sorte qu'en première approximation nous pouvons les considérer comme égaux à une même constante. D'autre part d'après Cressman la distance entre les axes est peu variable et de l'ordre de 15 à 20 degrés de latitude, ce qui nous conduit à assimiler également d à une constante. Enfin, comme U_0 et U_1 ne sont jamais très différents, nous pouvons aussi admettre que les deux paramètres sont égaux, et nous voyons alors que le nombre de paramètres se trouve réduit à un seul U_0 , de sorte

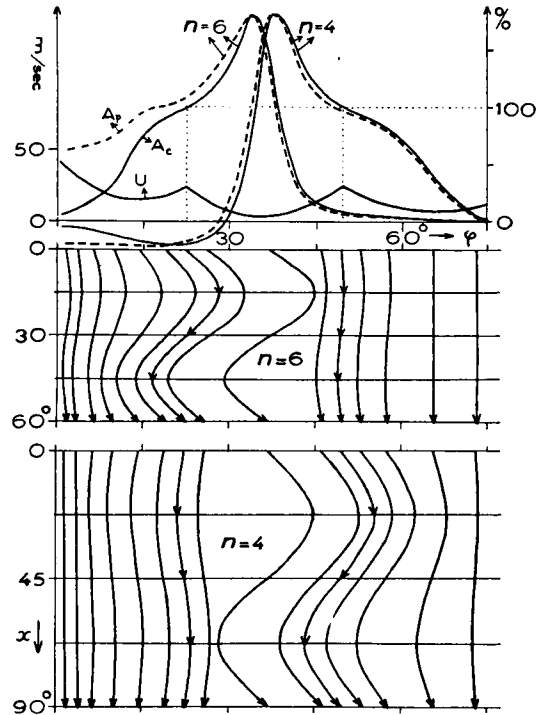


Fig. 9. Ondes stationnaires d'un jet double ne comportant que des vents d'Ouest, et capable de deux longueurs d'onde stationnaires différentes ($n = 4$ et $n = 6$).

que la condition (60) établit, tout comme pour un jet simple, une relation bien déterminée entre U_0 et n , à savoir

$$\left(\frac{U_0}{\sigma_0 r_0} - \frac{1}{n} \right)^2 = \frac{e^{-2nd}}{n^2} \quad (61)$$

d'où nous tirons

$$U_0 = \frac{\sigma_0 r_0}{n} (1 \pm e^{-nd}) \quad (62)$$

Nous obtenons donc deux groupes de solutions, et il est facile de voir que les ondes stationnaires correspondantes sont des ondes supérieures si on prend le signe + devant l'exponentielle, et des ondes inférieures si on prend le signe —. Si on désigne encore par L la longueur d'onde mesurée à la latitude de l'axe y_0 , on déduit de (62) une relation entre U_0 et L , qui est représentée par un système de deux courbes (C) et (C'), correspondant respectivement aux ondes supérieures et aux ondes inférieures; sur

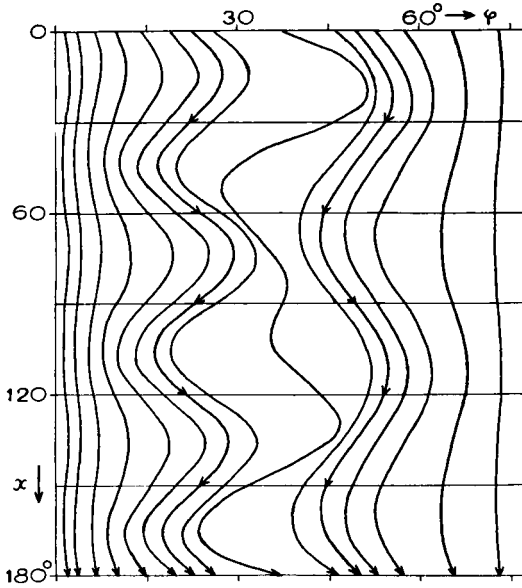


Fig. 10. Superposition des deux ondes stationnaires de la fig. 9.

la figure 6b ces courbes ont été construites en prenant pour $\sigma_0 r_0$ la même valeur que pour la figure 6a, et pour d la valeur 0,42 (valeur moyenne déduite des données de Cressman); le spectre de vitesse correspondant (ensemble des valeurs de U_0 pour les valeurs entières positives de n) est représenté de la même façon, mais il est constitué cette fois par la superposition de deux séries de raies.

Cet exemple particulier suffit à établir le résultat important suivant: *Dans le cas d'un jet double* (cas général d'après Cressman), *l'indice zonal ne suffit plus à déterminer, même approximativement, le type ondulatoire de la circulation générale*, puisqu'on peut avoir deux valeurs totalement différentes de la vitesse axiale pour une même valeur du nombre d'onde; toutefois il reste vrai que les ondes stationnaires les plus longues ($n = 2$) ne peuvent apparaître que dans des jet-streams rapides. De même il n'est plus exact que, pour un jet-stream donné, les ondes plus courtes que les ondes stationnaires se meuvent vers l'Est et les ondes plus longues vers l'Ouest, et on peut aussi avoir des ondes de même longueur que les ondes stationnaires et qui se meuvent soit vers l'Est, soit vers l'Ouest; des études comme celles de NAMIAS-CLAPP (1944) pour-

raient donner d'intéressantes confirmations à ce sujet.

Du chevauchement des deux séries de raies du spectre de vitesse de la fig. 6b, il résulte que certaines des raies de l'une des séries sont très voisines de l'une des raies de l'autre série, comme c'est le cas pour les raies $n = 6$ et $n = 7$ voisines de $U_0 = 23$ m/sec, et pour les raies $n = 5$ et $n = 6$ voisines de $U_0 = 28$ m/sec, et ce résultat signifie que pour un même jet double on peut avoir simultanément des ondes pratiquement stationnaires ayant deux longueurs différentes. D'ailleurs, il est toujours possible de trouver des jets doubles tels que la condition (60) soit exactement vérifiée pour deux valeurs différentes de n , car si on suppose par exemple que d est donné on obtient ainsi un système de deux équations qui déterminent $U_0/\sigma_0 r_0$ et $U_1/\sigma_1 r_1$. Les fig. 9 et 10 sont précisément relatives à un tel jet double, capable à la fois d'ondes stationnaires $n = 6$ et d'ondes stationnaires $n = 4$ (les premières sont des ondes supérieures, et les secondes des ondes inférieures). Sur la fig. 9 on a représenté, en plus du profil du jet, des ondes stationnaires $n = 6$ et $n = 4$ dans l'hypothèse où celles-ci existent seules, et où l'axe le plus déformé a une demi-amplitude égale à 6 degrés de latitude: on voit que pour $n = 6$ c'est l'axe méridional qui est le plus déformé, l'autre ne l'étant pratiquement pas, tandis que pour $n = 4$ c'est l'inverse qui se produit, et comme dans les deux cas le maximum de A_c ou de A_p est voisin du milieu du courant médian, il en résulte que l'amplitude des lignes de courant et des isobares décroît très brutalement à partir du maximum, vers le Nord pour $n = 6$, et vers le Sud pour $n = 4$. Cela se traduit par un phénomène de confluence-diffuence très prononcé en certains points du courant médian.

Dans la fig. 10 on a supposé que les deux ondes stationnaires précédentes sont superposées, et on voit qu'elles interfèrent seulement dans le courant médian, et que le phénomène de confluence-diffuence est encore accentué en certains endroits.

Les divers résultats peuvent permettre de s'expliquer des effets tout à fait comparables décrits en particulier par NAMIAS-CLAPP (1944), sans qu'il soit nullement nécessaire de faire appel à des mouvements verticaux comme certains auteurs l'ont fait, et il serait important

de vérifier que ces effets sont effectivement associés à une structure double du jet-stream.

En somme, la théorie que nous venons de faire rend compte d'une façon très satisfaisante des principaux phénomènes en rapport avec les centres d'action semi-permanents.

VI. Application aux ondes de cyclone

Nous avons montré dans l'Introduction que les seuls faits d'observation conduisaient à considérer la cyclogénèse comme due à l'association d'un facteur thermique troposphérique et d'un facteur dynamique propre au jet-stream, du moins en général. D'autre part nous avons trouvé dans les chapitres III et IV qu'un système de courants à tourbillon vertical uniforme pouvait être le siège d'ondes instables, ayant un maximum d'amplitude à une latitude bien déterminée, et une longueur d'onde voisine d'une ou plusieurs valeurs également bien déterminées, lorsque l'une des discontinuités du tourbillon est petite et négative alors que toutes les autres sont au contraire positives. Ces propriétés des ondes instables rappellent suffisamment celles qui caractérisent les ondes de cyclone dans le cas d'un courant de perturbations bien établi, pour qu'il soit permis de penser que le facteur dynamique ci-dessus invoqué n'est autre que l'instabilité dynamique acquise par le jet-stream sous l'effet d'une petite déformation susceptible d'être schématisée par l'apparition d'une discontinuité négative du tourbillon.¹

Il n'est d'ailleurs pas difficile d'imaginer une suite de phénomènes simples conduisant à une déformation de ce type. Considérons par exemple le cas des cyclones du front polaire nord-atlantique qui, ainsi que nous l'avons suggéré, ont très probablement pour cause initiale l'arrivée d'une masse d'air froid continentale ou arctique sur les eaux tièdes de la région du Gulf-Stream. Le premier phénomène qui doit logiquement résulter de ce contraste thermique est la naissance et le développement de courants de convection verticale dans la masse d'air froid, puisque celle-ci tend à être

instabilisée par le bas lorsqu'elle atteint les eaux océaniques plus chaudes qu'elle. Ces mouvements convectifs, dont l'existence est d'ailleurs révélée par l'observation directe, doivent s'étendre vers le haut d'autant plus facilement qu'ils sont accompagnés de formations nuageuses, donc rien ne semble s'opposer à ce qu'ils atteignent le jet-stream lui-même, et comme ils sont équivalents à une viscosité turbulente lorsqu'on les considère à l'échelle synoptique, ils doivent avoir pour effet de réduire la vitesse du jet-stream par rapport à la Terre, cela dans une zone relativement étroite débutant un peu à l'aval de leur lieu de formation et allant plus ou moins loin vers l'Est. En première approximation on a donc une déformation zonale du jet-stream, et comme il y a tout lieu de penser que la réduction de vitesse est maximum à une certaine latitude, on voit qu'elle est assez bien schématisée sous la forme de l'apparition d'une petite discontinuité négative du tourbillon, ce qui conduit à un jet quasi-simple ou quasi-double, suivant que le jet-stream initial était simple ou double: on obtient bien ainsi la déformation du type voulu pour avoir des ondes instables. Ainsi se trouverait précisé à son tour en quoi consiste l'association des facteurs thermique et dynamique dont nous avons parlé: ce seraient les mouvements convectifs qui établiraient le lien nécessaire entre les basses couches de l'atmosphère, siège de l'instabilité thermique, et les couches voisines de 12 km, siège de l'instabilité dynamique à l'échelle de la circulation générale. Il nous reste maintenant à examiner de plus près cette théorie au point de vue quantitatif.

1. Ondes de cyclone d'un jet simple

Pour fixer les idées nous raisonnerons sur le jet simple ayant pour profil la courbe *A* de la fig. 1. L'indice 1 étant affecté à la latitude de l'axe, on a alors: $\gamma_1 = 0,9$; $\varphi_1 = 45^\circ 7'$; $\omega_1 = 0,875 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$; $\sigma_1 = 3,5 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$. Si nous supposons ce jet transformé en un jet quasi-simple d'axe principal γ_1 et d'axe secondaire γ_0 , nous savons que le nouveau système est du type instable si l'on a la fois $\sigma_0 < 0$ et $\omega_0 < \omega_1$, et que la longueur d'onde angulaire moyenne des ondes instables est alors $\lambda_0 = (\omega_1 - \omega_0)/\sigma_1$, d'où l'on déduit la longueur d'onde linéaire correspondante par la formule

¹ Depuis la rédaction de cet article, nous avons pu montrer que des ondes quasi-instables, de longueur d'onde bien déterminée, peuvent aussi résulter de la modification du tourbillon vertical dans une zone étroite du jet-stream, ce qui paraît plus admissible que l'introduction d'une discontinuité du tourbillon.

Tableau 1. Les variations de L_0 et S_0 en fonction de φ_0

φ_0	45°7	44°7	40°7	27°6	20°0	13°1	7°4	6°0
L_0 (km)	0	↗ 1000	↗ 4000	↗ 7537	↘ 6509	↘ 4000	↘ 1000	0
$S_0 \times 10^6$ (c. g. s.)	5,09	↘ 4,96	↘ 4,37	↘ 2,35	↘ 1	↘ 0,10	↘ 4,7 × 10 ⁻⁹	0
	(110 km)	← Z' → (440 km)		← Z'' → (2300 km)				

φ_0	45°7	48°3	53°7	63°1	72°8	74°0
L_0 (km)	0	↗ 1000	↗ 2576	↗ 3876	↘ 2000	0
$S_0 \times 10^6$ (c. g. s.)	1,78	↘ 1,67	↘ 1	↘ 0,22	↘ 1,0 × 10 ⁻¹¹	0
	(290 km)	← Z → (600 km)				

$L_0 = 2 \pi r_1 \lambda_0$. On voit ainsi qu'il ne peut y avoir des ondes instables que si la latitude φ_0 de l'axe secondaire est dans l'un des deux intervalles (6°0, 45°7), (45°7, 74°0) limités par les latitudes des points du profil A où l'on a $\omega = \omega_1$; en outre dans chacun de ces intervalles L_0 est nul aux latitudes limites et maximum à la latitude où ω est minimum sur le profil A. D'autre part le coefficient S_0 d'amplification maximum des ondes instables est donné par la formule (37) avec une précision absolue suffisante tant que $|\sigma_0|$ est au plus égal au 1/10 environ de σ_1 : nous adopterons la valeur $\sigma_0 = -0,3 \times 10^{-5} \text{ sec}^{-1}$, dont l'ordre de grandeur paraît correct pour caractériser une petite déformation du jet simple considéré. Les variations de L_0 et S_0 en fonction de φ_0 dans chacun des intervalles ci-dessus mentionnés sont données dans le tableau 1.

Pour que les ondes instables ainsi déterminées soient susceptibles de représenter des ondes de cyclone, il faut d'une part que leur longueur d'onde ne soit ni trop courte ni trop longue, d'autre part que leur coefficient d'amplification ait une valeur significative à l'échelle synoptique.

a) Si la longueur d'onde trouvée est trop courte, il n'est pas possible de négliger la composante verticale du mouvement ondulatoire comme nous l'avons fait jusqu'ici, donc la stabilité hydrostatique de l'atmosphère intervient pour réduire et même supprimer l'effet de l'instabilité dynamique. Notre théorie est donc incapable de déterminer quelle doit

être la longueur d'onde minimum des ondes de cyclone, et nous devons à cet effet nous adresser à l'observation: ainsi que nous l'avons déjà admis, la valeur $L_0 = 1.000 \text{ km}$ semble raisonnable comme minimum.

b) Si la longueur d'onde est trop longue, l'assimilation de la déformation du jet-stream à une déformation zonale n'est plus admissible, puisque la zone de déformation a toujours une longueur finie en raison de l'existence des phénomènes de dissipation. Ainsi dans le cas du front polaire nord-atlantique, dont la longueur ne dépasse guère 8.000 km, on ne peut à proprement parler considérer les perturbations associées à ce front comme des ondes de cyclone que si L_0 est au plus de l'ordre de 4.000 km environ, de façon à avoir au moins deux ondulations le long de la ligne de déformation. Si la valeur obtenue pour L_0 est de l'ordre de 4.000 km il est clair que la stabilité dynamique de la portion non déformée du jet-stream doit interférer avec l'instabilité due à la zone de déformation, ce qui peut encore conduire à des perturbations instables si L_0 n'est pas trop grand, mais ce seraient alors des perturbations dépourvues de tout caractère ondulatoire, du type des cyclones tropicaux par exemple: nous y reviendrons dans un moment. Enfin si L_0 est nettement supérieur à 4.000 km, toute instabilité dynamique doit disparaître, donc on ne peut plus avoir de perturbations cycloniques correspondantes. Ce raisonnement simple, qu'il y aurait évidemment lieu de préciser, nous conduit

donc à adopter $L_0 = 4.000$ km comme maximum admissible pour les ondes de cyclone.

c) L'échelle de temps synoptique étant de l'ordre de 1 à 4 jours, le coefficient S_0 n'a une valeur significative que s'il est de l'ordre de 10^{-6} sec^{-1} au moins.

Cette discussion nous conduit donc à ne retenir finalement que les intervalles de variation de φ_0 où l'on a à la fois $1.000 \text{ km} < L_0 < 4.000 \text{ km}$ et $S_0 > 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$, comme définissant approximativement les «zones sensibles» du jet simple où doit se trouver l'axe secondaire pour que des ondes de cyclone puissent se développer. Le tableau I montre qu'il en existe deux, désignées par les symboles Z et Z', et situées respectivement au Nord et au Sud de l'axe principal. On voit que ces zones sont relativement étroites (la plus large n'a que 600 km), et que leurs distances à l'axe principal, également indiquées sur le tableau I, sont aussi relativement faibles (moins de 300 km). On note d'autre part que la limite septentrionale de la zone Z est déterminée par la condition que doit remplir S_0 , tandis que la limite méridionale de Z' est au contraire déterminée par la condition que doit remplir L_0 ; de là il résulte que les ondes de cyclone dues à l'excitation de la zone Z ont une valeur maximum nettement inférieure à 4.000 km (de l'ordre de 2.500 km seulement), et comme c'est surtout cette zone qui a des chances d'intervenir s'il s'agit des cyclones de front polaire (c'est en effet la plus large et la plus proche des sources d'air froid), nous arrivons au résultat important suivant: *Dans le cas d'un jet simple, la longueur d'onde maximum des cyclones de front polaire est normalement indépendante de la longueur de la zone déformée et de l'ordre de 2.500 km: or c'est bien là, en fait, la limite supérieure approximative constatée pour la longueur d'onde de ces cyclones.* Toutefois cela n'exclut pas la possibilité d'une excitation de la zone Z', et par suite celle d'ondes de cyclone plus longues et à caractère ondulatoire moins marqué: ce pourrait être le cas, par exemple, pour les perturbations méditerranéennes.

Voici en outre d'autres propriétés des ondes de cyclone théoriques résultant de l'examen du tableau I complété par celui du profil A:

1°) Les ondes sont d'autant plus longues que la déformation du jet-stream a lieu plus loin de l'axe.

2°) La vitesse de propagation d'une onde, voisine de la vitesse du vent sur l'axe secondaire, est toujours dirigée vers l'Est, et d'autant plus grande que le jet est plus rapide et que l'onde est plus courte. Ce résultat est en bon accord avec l'observation.

3°) Pour un jet-stream de vitesse moyenne (U_0 de l'ordre de 40 m/sec, cas du profil A), cette vitesse de propagation varie, suivant la longueur d'onde, de 20 à 32 m/sec si l'excitation a lieu dans la zone Z, et de 20 à 37 m/sec si elle a lieu dans Z'. Cette vitesse est un peu forte comparée à celle que l'on observe, et qui ne dépasse guère 20 m/sec; toutefois le désaccord n'est pas très important, et au surplus il n'a rien de surprenant, vu que l'on a totalement négligé l'action dynamique des couches d'air, plus lentes que la jet-stream, situées au-dessus et au-dessous de ce dernier.

2. Ondes de cyclone d'un jet double

Nous avons vu que la distance entre les axes d'un jet-stream double était normalement de l'ordre de 15 degrés de latitude au moins, ce qui correspond à une pseudo-distance $d > 0,26$; d'autre part la valeur 4.000 km que nous avons admise comme longueur d'onde maximum des ondes de cyclone correspond à un nombre d'onde $n > 5$ si on suppose la latitude inférieure à 60° . Il en résulte que l'on a $e^{-2nd} < 1/13$, valeur petite comparée à l'unité, ce qui permet de conclure que *dans le problème des ondes de cyclone on peut pratiquement remplacer un jet double par ses deux jets simples composants.* Il suffit d'ailleurs pour s'en convaincre de considérer par exemple les deux jets doubles particuliers ayant pour profils les courbes a et b de la figure 1, et pour lesquels la distance entre les axes est environ 18 degrés de latitude: on voit clairement que les spectres de propagation correspondants (fig. 2a et 2b) sont confondus avec leurs composants D_0 et D_1 pour toutes les valeurs de n supérieures à 5 ($\lambda < 0,2$).

Nous voyons ainsi qu'un jet double comporte normalement quatre zones sensibles, formant deux systèmes rattachés chacun à un axe, et tels que si l'un d'eux est excité il peut apparaître des ondes de cyclone ayant leur intensité maximum au voisinage de l'axe correspondant, alors que sur l'autre axe cette intensité est au contraire très faible. Toutes les

propriétés énoncées pour les ondes de cyclone d'un jet simple demeurent valables (à condition de remplacer le terme «axe principal» par «axe principal le plus proche»); en outre, vu que la distance entre les deux systèmes de zones sensibles est relativement grande, l'éventualité d'une excitation simultanée et indépendante de ces deux systèmes a de fortes chances de se présenter, d'où la propriété additionnelle suivante:

Dans le cas d'un jet double, on peut avoir simultanément deux familles distinctes d'ondes de cyclone à des latitudes différentes. Or c'est un fait bien connu que deux courants de perturbations peuvent exister en même temps dans la zone des latitudes moyennes, et il serait important de vérifier que cela se produit lorsque le jet-stream possède une structure double.

Remarque. — On notera que nous n'avons fait intervenir nulle part, dans cette théorie des ondes de cyclone, la condition que le nombre d'ondes n doit être entier. En effet, le fait que la zone de déformation du jet-stream a une longueur finie ôte toute signification physique à cette condition, puisqu'elle correspond à l'hypothèse d'une répartition zonale; il n'y a d'ailleurs pas lieu d'introduire d'autre condition de résonance analogue, car la zone de déformation va certainement en s'estompant progressivement à ses deux extrémités.

3. Cyclones tropicaux et vagues d'Est

Nous n'avons considéré en somme, jusqu'ici, que les ondes de cyclone des fronts polaires, mais la théorie précédente peut aussi s'appliquer aux perturbations des basses latitudes. A cet effet, reprenons le cas particulier du jet simple de profil A. En plus de la zone sensible Z' déjà considérée, le tableau I met en évidence l'existence d'une autre zone contigüe Z'' , beaucoup plus large (elle s'étend vers l'équateur jusqu'à la latitude 20°), et caractérisée par le fait que l'on a à la fois $S_0 > 10^{-6} \text{ sec}^{-1}$ et $L_0 > 4.000 \text{ km}$, en d'autres termes les perturbations instables dues à l'excitation de cette zone ont une instabilité de valeur significative, mais leur longueur d'onde théorique est trop grande pour des ondes de cyclone, donc d'après ce que nous avons dit plus haut elles peuvent représenter des perturbations cycloniques sans caractère ondulatoire, du type des cyclones tropicaux. Toutefois nous remarquons

que la zone en question se trouve dans une région normalement occupée par la ceinture des anticyclones subtropicaux, où des mouvements convectifs à grand développement vertical ont par suite très peu de chances de se produire, et en conséquence la formation des perturbations dont nous venons de parler est très peu probable.

Mais supposons maintenant que le jet-stream soit, pour une raison ou une autre, soumis à un déplacement général vers l'équateur, sans changement appréciable de son profil méridien. La zone Z'' , suivie dans son mouvement par la zone Z' , pourra alors atteindre par exemple une région de moussons, où les mouvements convectifs se développent avec grande facilité, donc elle pourra être excitée avec une intensité suffisante pour que des perturbations instables se développent, et ainsi se trouverait expliquée la naissance des cyclones tropicaux. En même temps la zone Z' , se trouvant à proximité de la même région d'instabilité thermique, peut elle aussi devenir le siège de perturbations instables ayant cette fois le caractère d'ondes de cyclone: ce pourrait être là l'explication de l'origine de ce que plusieurs auteurs ont décrit sous le nom de «vagues d'Est» ou «easterly waves», et qui apparaissent précisément en bordure septentrionale (dans l'hémisphère Nord) des régions de moussons, par exemple en Afrique Occidentale Française.

4. Rôle possible de l'ozone

Nous n'avons considéré jusqu'ici que l'instabilité thermique de la basse atmosphère comme cause initiale de la cyclogénèse, mais il est évident que tout autre phénomène susceptible de ralentir localement le jet-stream peut jouer le même rôle. Ainsi la déformation des lignes de courant associée aux centres d'action semi-permanents peut fort bien produire un tel résultat si son amplitude est suffisante, et dans ce cas on aurait affaire à une cyclogénèse purement dynamique; il semble bien, en effet, que certaines perturbations cycloniques ne peuvent pas s'expliquer autrement. Mais il est également possible que la couche d'ozone, qui est probablement le siège de mouvements convectifs importants par suite de son fort pouvoir absorbant dans l'ultra-violet, intervienne dans certains cas au même titre que la troposphère inférieure, par exemple si un

maximum de concentration en ozone se trouve créé le long d'un certain parallèle comme conséquence de la circulation générale: cela

permettrait peut-être d'éclaircir le problème des relations entre l'activité cyclonique et l'activité solaire.

REFERENCES

- CRESSMAN, G. P., 1950: Variations in the Structure of the Upper Westerlies. *J. Meteor.*, **7**, 1, pp. 36—47.
- HAURWITZ, B., 1940: The Motion of Atmospheric Disturbances on the Spherical Earth. *J. of Marine Research*, **3**, pp. 254—267.
- KUO, H.-L., 1949: Dynamic Instability of Two-Dimensional Nondivergent Flow in a Barotropic Atmosphere. *J. Meteor.*, **6**, 2, pp. 105—122.
- 1950: The Motion of Atmospheric Vortices and the General Circulation. *J. Meteor.*, **7**, 4, pp. 247—258.
- NAMIAS, J., CLAPP, PH. F., 1944: Studies of the Motion and Development of Long Waves in the Westerlies. *J. Meteor.*, **1**, p. 57.
- PLATZMAN, G. W., 1949: The Motion of Barotropic Disturbances in the Upper Troposphere. *Tellus*, **1**, 3, pp. 53—64.
- QUENEY, P., 1950: Adiabatic Perturbation Equations for a Zonal Atmospheric Current. *Tellus*, **2**, 1, pp. 35—51.
- ROSSBY, C.-G., 1939: Relations between Variations in the Intensity of the Zonal Circulation of the Atmosphere and the Displacements of the Semi-Permanent Centers of Action. *J. of Marine Research*, **2**, 1, pp. 38—55.
- 1947: On the Distribution of Angular Velocity in Gaseous Envelopes Under the Influence of Large-Scale Horizontal Mixing-Processes. *Bull. Am. Met. Soc.*, **28**, 2, pp. 53—68.
- SVERDRUP, H. U., 1943: *Oceanography for Meteorologists*. Prentice Hall, New York, 246 pp.