

Der Mechanismus des meteorologischen Lärmes

Von K. HINKELMANN

Zentralamt des Deutschen Wetterdienstes in der U. S. Zone, Bad Kissingen

(Manuscript received 16 June 1951)

Abstract

Using a simple atmospheric model, the difference between the solutions of the primitive and the quasi-hydrostatic equations is demonstrated. The results show that the quasi-hydrostatic processes are largely determined by the initial field of pressure wherever the meteorological "noise"-phenomena (in the form of short-period oscillations about a trend of the meteorological elements) depend on the initial field of the non-geostrophic wind components. This trend can be computed with sufficient accuracy also by a numerical integration of the primitive equations, which are mathematically simpler to handle than the quasi-hydrostatic equations.

In this case the initial wind fields can be computed from the observed pressure field by using the geostrophic approximation.

To find the trend the results have to be smoothed.

Die hydro- und thermodynamischen Differentialgleichungen erfassen bei ihrer Anwendung auf atmosphärische Vorgänge nicht nur die relativ langsam ablaufenden sogenannten quasistatischen Prozesse, sondern zwangsläufig auch gewisse kurzperiodischen Abläufe, bei denen Ausbreitungsgeschwindigkeiten in der Größenordnung der Schallgeschwindigkeit auftreten und die man deswegen als meteorologischen Lärm bezeichnet.

Im allgemeinen wirken sich diese kurzperiodischen Vorgänge mit relativ geringen Amplituden nur in Form einer Unruhe im zeitlichen Gang der meteorologischen Zustandsvariablen aus und werden in den synoptischen Karten weitgehend weggeglättet, so dass man sich bei einer rechnerischen Vorhersage mit der Erfassung der quasistatisch verlaufenden Änderungsprozesse begnügen könnte. Beim numerischen Integrationsverfahren wird aber gerade der zeitliche Gang, also der partielle zeitliche Differentialquotient, dessen Berechnung auch ohne vollständige Integration

aus den Differentialgleichungen verhältnismässig einfach ist, prognostisch zur Ermittlung der im nächsten Zeitintervall eintretenden Änderung der betrachteten Zustandsgrösse ausgewertet.

Benutzt man für den numerischen Rechenprozess die hydro- und thermodynamischen Grundgleichungen in unveränderter Form, so wird man bei Berechnung der Tendenzen ungeglättete Momentanwerte erhalten. Aus den entsprechenden Differenzenquotienten lassen sich demzufolge nur Änderungen für die betreffende Variable für ein Zeitintervall entnehmen, das klein ist gegenüber der Schwungsdauer der kurzperiodischen Lärmvorgänge, was einen Aufwand an Rechenarbeit erfordert, der eine rationelle Auswertung des numerischen Integrationsverfahren erschwert.

Die Anzahl der erforderlichen Zeitschritte kann wesentlich reduziert werden, wenn diese für die Rechnung unbequemen, meteorologisch uninteressanten kurzdauernden Vorgänge aus den Differentialgleichungen elimi-

niert werden, was allerdings auch eine grundlegende Änderung in der Gestalt der Differentialgleichungen zur Folge hat.

Im folgenden soll an Hand eines einfachen atmosphärischen Modells versucht werden, in den Lösungsfunktionen die kurzperiodischen Anteile von den quasistatischen zu separieren und abzuschätzen, für welche durch Druck- und Windfelder definierten Anfangszustände eine Elimination der meteorologischen Lärmvorgänge berechtigt erscheint.

I. Ausgangsgleichungen für das zugrundeliegende atmosphärische Modell

Als Ausgangsgleichungen sollen die bereits von J. G. CHARNEY (1949) diskutierten linearisierten Gleichungen einer homogenen Atmosphäre zugrundegelegt werden. Bei Gültigkeit der hydrostatischen Grundgleichung und bei Annahme eines durch

$$U = -\frac{g}{l} H_y = \text{const}$$

$$V = 0$$

definierten Grundzustandes schreiben sich diese:

$$Du = -gh_x + lv \quad (1)$$

$$Dv = -lu \quad (2)$$

Bewegungsgleichungen

$$Dh = \frac{lU}{g} v - Hu_x \quad (3)$$

Kontinuitätsgleichung,

wenn $u_z = v_z = u_y = v_y = h_y = 0$ vorausgesetzt, die geringe Abhängigkeit der Parameter l , H von y also als unerheblich betrachtet wird. In den Gleichungen bedeuten H Höhe der homogenen Atmosphäre, U , V Geschwindigkeitskomponenten des Grundzustandes; h , u , v die entsprechenden Größen der Störungsfelder; $D = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$, $l = 2\omega \sin \varphi$.

Das Gleichungssystem lässt sich in dieser einfachen Form allgemein integrieren. Wegen der vorgenommenen Vereinfachungen werden zwar die gefundenen Lösungen tatsächliche Wettervorgänge nur sehr weitgehend idealisiert wiedergeben. Zur Demonstration der charakteristischen Unterschiede in den Dimensionen

und in der Abhängigkeit von den Anfangsfeldern zwischen kurz- und langperiodischen Prozessen dürfte jedoch das Modell ausreichend sein, so daß dieses zumindest einen Einblick in die Wirkungsweise des atmosphärischen Mechanismus vermittelt und einen Hinweis geben dürfte, auf welche Weise und unter welchen Voraussetzungen eine derartige Elimination auch in den nichtlinearen dreidimensionalen Diff. Gl. System möglich und berechtigt ist.

Das System (1—3) läßt sich auf eine Diff. Gl. der Variablen h reduzieren. Aus (1, 2) erhält man

$$(D^2 + l^2)u = -gDh_x$$

$$\text{bzw. wegen } D \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} D$$

$$(D^2 + l^2)u_x = -gDh_{xx} \quad (4)$$

$$(D^2 + l^2)v = glh_x \quad (5)$$

Führt man diese Gl. in (3) ein, so resultiert eine homogene lineare Diff. Gl. III. Ordnung in h allein:

$$D \left(D^2 - gH \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h + l^2 h_t = 0; \quad (6)$$

die im Falle $l \rightarrow 0$ in die Diff. Gl. für Schwerewellen

$$\left(D^2 - gH \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) h = 0$$

übergeht. Das System (4—6) ist dem System (1—3) völlig äquivalent und soll allgemein integriert werden, wobei insbesondere der Einfluß einer Variation der beliebig vorgebbaren Windfelder u und v auf die zeitliche Entwicklung des durch die Größe h charakterisierten Druckfeldes untersucht werden soll.

Wir beschränken uns dabei auf das Anfangswertproblem, bei dem zu einem bestimmten Zeitpunkt $t = 0$ die Funktionen $h = h^0$, $u = u^0$, $v = v^0$ für alle x -Werte vorgegeben sind, wodurch $h(x, t)$, $u(x, t)$ und $v(x, t)$ eindeutig bestimmt sind.

II. Berechnung der Druckfunktion $h(x, t)$

Der Ansatz $h = h_0 A e^{i\nu(x-c)}$ führt nach Einsetzen in Gl. (6) auf die Frequenzgleichung

$$-v^2 (U - c)^3 + gHv^2 (U - c) - l^2 c = 0$$

$$\text{bzw. auf } \Delta^3 - m^2 \Delta + \frac{U l^2}{\nu^2} = 0 \quad (7)$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird

$$m^2 = gH + \frac{l^2}{\nu^2} \quad \text{und} \\ \Delta = U - c \quad (7a)$$

Für $U^2 < gH \sim 10^5 [m^2 \text{ sec}^{-2}]$ existieren drei reelle Wurzeln ($\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$), wovon Δ_1

nahe bei $\frac{U l^2}{m^2 \nu^2}$; Δ_2, Δ_3 nahe bei $\pm m$ liegen.

Δ_1 läßt sich als Grenzwert eines Kettenbruches darstellen mit dem Bildungsgesetz

$$\Delta_{1,n+1} = \frac{\frac{U l^2}{\nu^2}}{m^2 - \Delta_{1,n}^2}; \quad \Delta_{1,0} = \frac{U l^2}{m^2 \nu^2}$$

Der Grenzwert $\Delta_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_{1,n}$ werde mit d abgekürzt. Die beiden weiteren Wurzeln Δ_2, Δ_3 ergeben sich aus

$$\Delta^2 + d\Delta + (d^2 - m^2) = 0,$$

so daß

$$\Delta_1 = d \approx \frac{U l^2}{m^2 \nu^2}$$

$$\Delta_2 = -\frac{d}{2} + \sqrt{m^2 - \frac{3}{4}d^2} = -\frac{d}{2} + M; \\ M = +\sqrt{m^2 - \frac{3}{4}d^2}$$

$$\Delta_3 = -\frac{d}{2} - \sqrt{m^2 - \frac{3}{4}d^2} = -\frac{d}{2} - M \quad (8)$$

$$c_k = U - \Delta_k, \quad k = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Mit den drei Werten für c erhält man als allgemeineren Ansatz für h

$$h(x, t) = h_0 \sum_{k=1}^3 A_k e^{i\nu(x - c_k t)} \quad (10)$$

Der Lösungsansatz (10) erfaßt alle Lösungen mit Anfangsfeldern in h^0, u^0, v^0 in Form harmonischer Funktionen in x der gleichen Wellen-

länge $L = \frac{2\pi}{\nu}$. Eine Anpassung an beliebige

Anfangsfunktionen ergibt sich leicht durch Superposition von particulären Lösungen der Form (10) mit verschiedener Frequenz ν zu Fourierreihen (bei periodischen Anfangsfeldern). Man erhält bei periodischen Anfangsfunktionen für h^0, u^0, v^0 mit der Intervalllänge

$$L^* \text{ wegen } L = \frac{L^*}{n}; \quad \nu = \frac{2\pi}{L^*} n \text{ für}$$

$$h(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{0\nu} \sum_{k=1}^3 A_{k\nu} e^{i\nu(x - c_{k\nu}t)}, \\ n = \frac{L^*}{2\pi} \nu = \pm 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

worin noch die $A_{k\nu}$ aus den Anfangsbedingungen zu bestimmen wären. Da die Berechnungsgleichungen für $A_{k\nu}$ sich für alle ν entsprechen, genügt es, diese bei einer festgehaltenen Frequenz ν aufzustellen. Z. Zt. $t=0$ muß gelten:

$$h(x, 0) = h^0 \quad \text{und wegen (1-3)}$$

$$Dh(x, 0) = \frac{U l}{g} \nu^0 - H u_x^0$$

$$D^2 h(x, 0) = -\frac{U l^2}{g} u^0 + H(g h_{xx}^0 - l v_x^0) \quad (12)$$

Denkt man sich die Anfangsfunktionen für h^0, u^0, v^0 nach Fourier zerlegt, so möge für ein bestimmtes ν gelten:

$$h_\nu^0 = h_{0\nu} e^{i\nu x} \quad h_0, u_0, v_0 = \text{komplexe Amplituden der betrachteten Partialwelle } z \cdot Zt \cdot t=0 \text{ mit} \\ u_\nu^0 = u_{0\nu} e^{i\nu x} \\ v_\nu^0 = v_{0\nu} e^{i\nu x} \quad L = \frac{2\pi}{\nu} \quad (13)$$

Setzt man (10) und (13) in (12) ein, so erhält man zur Bestimmung der A_k folgendes lineares Gleichungssystem:

$$\sum_{k=1}^3 A_k = 1$$

¹ Zur vereinfachten Schreibweise soll künftig der Index ν wieder fortgelassen werden.

$$\sum_{k=1}^3 \Delta_k A_k = -H \frac{u_0}{h_0} - \frac{Ul}{g\nu} \frac{v_0}{h_0} i \equiv F$$

$$\sum_{k=1}^3 \Delta_k^2 A_k = gH + \frac{Ul^2}{g\nu^2} \frac{u_0}{h_0} + H \frac{l}{\nu} \frac{v_0}{h_0} i \equiv G \quad (14)$$

Mit den Bezeichnungen (8) für Δ_k erhält man anstelle von (11) für eine bestimmte Frequenz (siehe Fussnote 1):

$$h(x, t) = h_0 \left\{ A_1 e^{i\nu(x - ct)} + [(A_2 + A_3) \cos \nu Mt + (A_2 - A_3) i \sin \nu Mt] \cdot e^{i\nu \left[x - \left(U + \frac{d}{2} \right) t \right]} \right\} \quad (11a)$$

und anstelle von (14)

$$A_1 + (A_2 + A_3) = 1$$

$$d A_1 - \frac{d}{2} (A_2 + A_3) + M(A_2 - A_3) = F$$

$$d^2 A_1 + \left(M^2 + \frac{d^2}{4} \right) (A_2 + A_3) - dM(A_2 - A_3) = G \quad (14a)$$

Für die Amplituden der Funktion h in Gl. (11a) erhält man daraus:

$$A_1 = \frac{\left(M^2 + \frac{d^2}{4} \right) - G - d \left(F + \frac{d}{2} \right)}{M^2 - \frac{9}{4} d^2}$$

$$A_2 + A_3 = 1 - A_1$$

$$A_2 - A_3 = \frac{1}{M} \left(F + \frac{d}{2} - \frac{3}{2} d A_1 \right) \quad (15)$$

Zwecks bequemerer Variation des Anfangszustandes in u und v soll angesetzt werden

$$u^0 = u_0 e^{i\nu x} = \delta i \frac{g\nu}{l} h_0 e^{i\nu x}$$

$$v^0 = v_0 e^{i\nu x} = (1 - \varepsilon) i \frac{g\nu}{l} h_0 e^{i\nu x} \quad (16)$$

Da $v_g^0 = i \frac{g\nu}{l} h_0 e^{i\nu x}$, $u_g^0 = 0$ die Komponenten

des zu $h^0 = h_0 e^{i\nu x}$ zugehörigen geostrophischen Windes bezeichnen, so stellen die dimensionslosen komplexen Zahlen δ und ε ein Maß dar für die Auslenkung des Anfangswindfeldes gegenüber dem geostrophischen. Die Beträge von δ , ε geben das Verhältnis der Amplituden der nichtgeostrophischen Komponenten zur geostrophischen wieder, die Winkel von ε , δ deren Phasenverschiebung gegenüber der geostrophischen Windkomponente.

Mit diesen Ansätzen (16) für u^0 und v^0 erhält man anstelle von (14)

$$\sum_{k=1}^3 A_k = 1$$

$$\sum_{k=1}^3 \Delta_k A_k = \left[(1 - \varepsilon) U - \frac{\delta i\nu}{l} gH \right] = F$$

$$\sum_{k=1}^3 \Delta_k^2 A_k = \left[gH \varepsilon + \frac{\delta i l}{\nu} U \right] = G \quad (14b)$$

Mit (14) und (15) ist die Funktion $h(x, t)$ in (11 bzw. 11a) bestimmt. Bevor die auftretenden Amplituden A_k numerisch berechnet werden, sollen die weiteren Funktionen u und v ermittelt werden.

III. Berechnung der horizontalen Windfelder u und v

Die Funktionen u , v gewinnt man nach Vorliegen der Lösung h aus Gln. (4 u. 5), in welchen die rechten Seiten als inhomogene Terme betrachtet werden können. Einsetzen von $h(x, t)$ aus (10) in (4) und (5) ergibt:

$$(D^2 + l^2)u = -gh_0 i^2 \nu^2 \cdot$$

$$\cdot \sum_{k=1}^3 A_k \Delta_k e^{i\nu(x - c_k t)} \text{ und}$$

$$(D^2 + l^2)v = gh_0 i l \nu \cdot \sum_{k=1}^3 A_k \cdot e^{i\nu(x - c_k t)}$$

mit den Lösungen:

$$u = gh_0 \sum_{k=1}^3 \frac{A_k \Delta_k}{l^2 - \Delta_k^2} e^{i\nu(x - c_k t)} + (\alpha_u \cos lt + \beta_u i \sin lt) e^{i\nu(x - Ut)}$$

$$\nu = \frac{g l i}{v} h_0 \sum_{k=1}^3 \frac{A_k}{l^2 - \Delta_k^2} e^{i\nu(x-c_k t)} + (\alpha_\nu \cos lt - \beta_\nu i \sin lt) e^{i\nu(x-Ut)}$$

Die Lösungen der homogenen Differentialgleichungen (4,5) verschwinden² jedoch, da $\alpha_u = \beta_u = \alpha_\nu = \beta_\nu = 0$, wie man erkennt, wenn man die Lösungsfunktionen in *Gln.* (1-3) einsetzt und die Frequenzgleichung (7) beachtet, so daß man für u und ν schließlich erhält:

$$\begin{aligned} u &= \frac{g\nu}{l} h_0 \sum_{k=1}^3 \frac{l}{v} \frac{A_k \Delta_k}{D_k} e^{i\nu(x-c_k t)} = \\ &= \frac{g\nu}{l} h_0 \sum_{k=1}^3 B_k e^{i\nu(x-c_k t)} = \\ &= \frac{g\nu}{l} h_0 \left\{ B_1 e^{i\nu(x-c_1 t)} + [(B_2 + B_3) \cos \nu M t + \right. \\ &\quad \left. + i(B_2 - B_3) \sin \nu M t] e^{i\nu \left[x - \left(U + \frac{d}{2} \right) t \right]} \right\} \quad (17) \\ \nu &= \frac{g\nu}{l} h_0 i \sum_{k=1}^3 \frac{l^2}{v^2} \frac{A_k}{D_k} e^{i\nu(x-c_k t)} = \\ &= \frac{g\nu}{l} h_0 i \sum_{k=1}^3 C_k e^{i\nu(x-c_k t)} = \\ &= \frac{g\nu}{l} h_0 i \left\{ C_1 e^{i\nu(x-c_1 t)} + [(C_2 + C_3) \cos \nu M t + \right. \\ &\quad \left. + i(C_2 - C_3) \sin \nu M t] e^{i\nu \left[x - \left(U + \frac{d}{2} \right) t \right]} \right\} \quad (18) \end{aligned}$$

worin bedeutet:

$$D_k = \frac{l^2}{v^2} - \Delta_k^2; \quad B_k = \frac{l}{v} \frac{A_k \Delta_k}{D_k}; \\ C_k = \frac{l^2}{v^2} \frac{A_k}{D_k}.$$

Unter Benutzung der Frequenzgleichung in der Form:

² Im Falle $\nu = 0$ tritt allerdings die inertielle Frequenz l auf. Man erhält für die Anfangsfelder:

$h(x, 0) = u(x, 0) = 0$; $\nu(x, 0) = \nu_0 = \text{const}$ die Lösung:

$u = \nu_0 \sin lt$; $\nu = \nu_0 \cos lt$; $h = \nu_0 \frac{u}{g} \sin lt$.

$$\begin{aligned} K_n &= \sum_{k=1}^3 \frac{A_k \Delta_k^n}{D_k} = \frac{U l^2}{g H v^2} \sum_{k=1}^3 \frac{A_k \Delta_k^{n-1}}{D_k} - \\ &- \frac{1}{g H} \sum_{k=1}^3 A_k \Delta_k^n = \left[1 - \left(\frac{U l}{g H v} \right)^2 \right]^{-1} \frac{\nu^2}{l^2} \cdot \\ &\cdot \sum_{k=1}^3 A_k \left[\Delta_k^n - \frac{\Delta_k^{n+2}}{g H} - \frac{1}{U} \left(\frac{U l}{g H v} \right)^2 \Delta_k^{n+1} \right] \end{aligned}$$

ergibt sich für

$$K_0 = \frac{\nu^2}{l^2} (1 - \varepsilon) = - \frac{\nu}{l} \frac{1}{g} i \frac{\nu_0}{h_0}$$

$$K_1 = \frac{\nu}{l} \delta i = \frac{1}{g} \frac{u_0}{h_0}$$

$$K_2 = -\varepsilon$$

und damit für die dimensionslosen Koeffizienten:

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{l}{v} \frac{A_1 d}{D_1}, \quad C_1 = \frac{l^2}{v^2} \frac{A_1}{D_1} \\ B_2 + B_3 &= \delta i - B_1, \quad C_2 + C_3 = 1 - \varepsilon - C_1 \\ B_2 - B_3 &= \frac{1}{M} \left\{ -\frac{l}{v} \varepsilon + \frac{d}{2} \delta i - \frac{3}{2} d B_1 \right\}, \\ C_2 - C_3 &= \frac{1}{M} \left\{ \frac{l}{v} \delta i + \frac{d}{2} (1 - \varepsilon) - \frac{3}{2} d C_1 \right\} \end{aligned}$$

Eine Vorstellung über die Größenverhältnisse der in den Funktionen h, u, ν auftretenden Amplituden A_k, B_k, C_k in Abhängigkeit von der Wellenlänge $L = \frac{2\pi}{\nu}$ vermittelt die Tabelle 1, in welcher $l = 10^{-4} [\text{sec}^{-1}]$, $U = 15 [m \cdot \text{sec}^{-1}]$, $gH = 8 \cdot 10^4 [m^2 \text{sec}^{-2}]$ angenommen wurde.

IV. Elimination des meteorologischen Lärmes

Die Abschätzung der Größenverhältnisse ergibt, daß in dem meteorologisch interessierenden Spektrum mit ausreichender Näherung gesetzt werden kann:

$$A_1 \approx 1 - \frac{gH}{m^2} \varepsilon; \quad B_1 \approx \frac{\nu}{l} d \left(1 - \frac{gH}{m^2} \varepsilon \right);$$

Tab. 1. Amplituden der Funktionen h , u , v nach Gln. (11a, 17, 18); mit $U = 15$ [$m \text{ sec}^{-1}$],
 $gH = 8 \cdot 10^4$ [$m^2 \text{ sec}^{-3}$] und $l = 10^{-4}$ [sec^{-1}]

L $10^6 m$	A_1	$A_2 + A_3$	$A_2 - A_3$
30	$1 + 2,61 \cdot 10^{-4} - 0,260 \varepsilon - 0,0172 \delta i$	$- 2,61 \cdot 10^{-4} + 0,260 \varepsilon + 0,0172 \delta i$	$0,00701 - 0,0192 \varepsilon - 0,302 \delta i$
25	$1 + 2,06 \cdot 10^{-4} - 0,336 \varepsilon - 0,0166 \delta i$	$- 2,06 \cdot 10^{-4} + 0,336 \varepsilon + 0,0166 \delta i$	$0,00103 - 0,0205 \varepsilon - 0,412 \delta i$
20	$1 + 0,82 \cdot 10^{-4} - 0,441 \varepsilon - 0,0147 \delta i$	$- 0,82 \cdot 10^{-4} + 0,441 \varepsilon + 0,0147 \delta i$	$0,00155 - 0,0222 \varepsilon - 0,590 \delta i$
15	$1 - 1,15 \cdot 10^{-4} - 0,584 \varepsilon - 0,0109 \delta i$	$+ 1,15 \cdot 10^{-4} + 0,584 \varepsilon + 0,0109 \delta i$	$0,00237 - 0,0258 \varepsilon - 0,905 \delta i$
10	$1 - 2,67 \cdot 10^{-4} - 0,760 \varepsilon - 0,0055 \delta i$	$+ 2,67 \cdot 10^{-4} + 0,760 \varepsilon + 0,0055 \delta i$	$0,00351 - 0,0336 \varepsilon - 1,549 \delta i$
5	$1 - 1,63 \cdot 10^{-4} - 0,927 \varepsilon - 0,0010 \delta i$	$+ 1,63 \cdot 10^{-4} + 0,927 \varepsilon + 0,0010 \delta i$	$0,00473 - 0,0459 \varepsilon - 3,422 \delta i$
1	$1 - 0,09 \cdot 10^{-4} - 0,997 \varepsilon - 0,0000 \delta i$	$+ 0,09 \cdot 10^{-4} + 0,997 \varepsilon + 0,0000 \delta i$	$0,00528 - 0,0527 \varepsilon - 17,743 \delta i$
	B_1	$B_2 + B_3$	$B_2 - B_3$
30	$0,0233 - 0,00604 \varepsilon - 4,00 \cdot 10^{-4} \delta i$	$- 0,0233 + 0,00604 \varepsilon + \delta i$	$- 7,10^{-4} - 0,860 \varepsilon + 1,00 \cdot 10^{-2} \delta i$
25	$0,0251 - 0,00841 \varepsilon - 4,17 \cdot 10^{-4} \delta i$	$- 0,0251 + 0,00841 \varepsilon + \delta i$	$- 8,66^{-4} - 0,815 \varepsilon + 1,15 \cdot 10^{-2} \delta i$
20	$0,0263 - 0,01162 \varepsilon - 3,87 \cdot 10^{-4} \delta i$	$- 0,0263 + 0,01162 \varepsilon + \delta i$	$- 7,78^{-4} - 0,748 \varepsilon + 0,98 \cdot 10^{-2} \delta i$
15	$0,0261 - 0,01527 \varepsilon - 2,85 \cdot 10^{-3} \delta i$	$- 0,0261 + 0,01527 \varepsilon + \delta i$	$- 6,62^{-4} - 0,645 \varepsilon + 0,84 \cdot 10^{-2} \delta i$
10	$0,0227 - 0,01722 \varepsilon - 1,24 \cdot 10^{-4} \delta i$	$- 0,0227 + 0,01722 \varepsilon + \delta i$	$- 3,78^{-4} - 0,490 \varepsilon + 0,56 \cdot 10^{-2} \delta i$
5	$0,0138 - 0,01281 \varepsilon - 0,14 \cdot 10^{-4} \delta i$	$- 0,0138 + 0,01281 \varepsilon + \delta i$	$- 0,78^{-4} - 0,271 \varepsilon + 0,19 \cdot 10^{-2} \delta i$
1	$0,0030 - 0,00259 \varepsilon - 0,00 \cdot 10^{-4} \delta i$	$- 0,0030 + 0,00259 \varepsilon + \delta i$	$- 0,08^{-4} - 0,056 \varepsilon + 0,01 \cdot 10^{-2} \delta i$
	C_1	$C_2 + C_3$	$C_2 - C_3$
30	$1 + 8,05 \cdot 10^{-4} - 0,260 \varepsilon - 0,0172 \delta i$	$- 8,05 \cdot 10^{-4} - 0,740 \varepsilon + 0,0172 \delta i$	$- 0,00200 - 0,0022 \varepsilon + 0,860 \delta i$
25	$1 + 8,36 \cdot 10^{-4} - 0,336 \varepsilon - 0,0166 \delta i$	$- 8,36 \cdot 10^{-4} - 0,664 \varepsilon + 0,0166 \delta i$	$- 0,00231 + 0,0001 \varepsilon + 0,815 \delta i$
20	$1 + 7,76 \cdot 10^{-4} - 0,441 \varepsilon - 0,0147 \delta i$	$- 7,76 \cdot 10^{-4} - 0,559 \varepsilon + 0,0147 \delta i$	$- 0,00197 + 0,0032 \varepsilon + 0,748 \delta i$
15	$1 + 5,63 \cdot 10^{-4} - 0,584 \varepsilon - 0,0109 \delta i$	$- 5,63 \cdot 10^{-4} - 0,416 \varepsilon + 0,0109 \delta i$	$- 0,00169 + 0,0063 \varepsilon + 0,645 \delta i$
10	$1 + 2,48 \cdot 10^{-4} - 0,760 \varepsilon - 0,0055 \delta i$	$- 2,48 \cdot 10^{-4} - 0,240 \varepsilon + 0,0055 \delta i$	$- 0,00111 + 0,0071 \varepsilon + 0,490 \delta i$
5	$1 + 0,28 \cdot 10^{-4} - 0,927 \varepsilon - 0,0010 \delta i$	$- 0,28 \cdot 10^{-4} - 0,073 \varepsilon + 0,0010 \delta i$	$- 0,00037 + 0,0033 \varepsilon + 0,271 \delta i$
1	$1 - 0,08 \cdot 10^{-4} - 0,997 \varepsilon - 0,0000 \delta i$	$+ 0,08 \cdot 10^{-4} - 0,003 \varepsilon + 0,0000 \delta i$	$- 0,00002 + 0,0002 \varepsilon + 0,056 \delta i$

$$C_1 \approx 1 - \frac{gH}{m^2} \varepsilon$$

$$A_2 + A_3 \approx \frac{gH}{m^2} \varepsilon; B_2 + B_3 \approx - \\ - \frac{\nu}{l} d \left(1 - \frac{gH}{m^2} \varepsilon \right) + i; C_2 + C_3 \approx - \\ - \left(1 - \frac{gH}{m^2} \varepsilon \right) \varepsilon$$

$$A_2 - A_3 \approx - \frac{gH}{M} \frac{\nu}{l} \delta i; B_2; -B_3 \approx - \\ - \frac{l}{\nu} \frac{1}{M} \varepsilon; C_2 - C_3 \approx \frac{l}{\nu} \frac{1}{M} \delta i$$

Die Wellen h , u , ν setzen sich aus zwei hinsichtlich der Schwingungsdauer wesentlich unterschiedlichen Anteilen zusammen. Die Terme mit den Amplituden A_1 , B_1 , C_1 mit einer Schwingungsdauer $T_1 = \frac{2\pi}{\nu c_1} = \frac{L}{c_1}$ stellen

in reeller Schreibweise harmonische Funktionen dar, die ohne Formänderung mit der konstanten Verlagerungsgeschwindigkeit c_1 sich in positiver x -Richtung fortbewegen. Die Terme mit den Amplituden $A_2 \pm A_3$; $B_2 \pm B_3$; $C_2 \pm C_3$ ergeben in dem Koordinatensystem

$$x - \left(U + \frac{d}{2} \right) t = \text{const.}$$

stehende Wellen mit einer Schwingungsdauer

$$T_{2,3} = \frac{2\pi}{\nu M} = \frac{L}{M}.$$

Tab. 2 gibt in Abhängigkeit von der Wellenlänge die Schwingungszeiten T_1 und $T_{2,3}$ wieder:

Tab. 2. Schwingungsdauer T_1 und $T_{2,3}$ in Abhängigkeit von der Wellenlänge L für $U = 15$ [m · sec⁻¹], $l = 10^{-4}$ [sec⁻¹], $gH = 8 \cdot 10^4$ [m² · sec⁻²]

L [10 ⁶ m]	$c_1 = U - d$ [m · sec ⁻¹]	M [m · sec ⁻¹]	T_1 [Std]	$T_{2,3}$ [Std]
30	3,89	555	2 140	15
25	5,03	438	1 380	14
20	6,61	426	840	13
15	8,76	370	475	11
10	11,39	325	244	9
5	13,90	294	100	5
1	14,95	283	19	1

Die Terme

$$h_Q = h_0 A_1 e^{i\nu(x-c_1 t)}$$

$$u_Q = \frac{g\nu}{l} h_0 B_1 e^{i\nu(x-c_1 t)}$$

$$\nu_Q = \frac{g\nu}{l} i h_0 C_1 e^{i\nu(x-c_1 t)}$$

charakterisieren also die eingangs als "quasistatisch verlaufend" bezeichneten Änderungsprozesse, während die Terme

$$h_L = h_0 \sum_{k=2}^3 A_k e^{i\nu(x-c_k t)} = \\ = h_0 [(A_2 + A_3) \cos \nu M t + \\ + (A_2 - A_3) i \sin \nu M t] e^{i\nu \left[x - \left(U + \frac{d}{2} \right) t \right]} \\ u_L = \frac{g\nu}{l} h_0 \sum_{k=2}^3 B_k e^{i\nu(x-c_k t)} = \\ = \frac{g\nu}{l} h_0 [(B_2 + B_3) \cos \nu M t + \\ + (B_2 - B_3) i \sin \nu M t] e^{i\nu \left[x - \left(U + \frac{d}{2} \right) t \right]} \\ \nu_L = \frac{g\nu}{l} h_0 \sum_{k=2}^3 C_k e^{i\nu(x-c_k t)} = \\ = \frac{g\nu}{l} h_0 [(C_2 + C_3) \cos \nu M t + \\ + (C_2 - C_3) i \sin \nu M t] e^{i\nu \left[x - \left(U + \frac{d}{2} \right) t \right]}$$

die wegen ihrer relativ geringen Schwingungsdauer als "meteorologischer Lärm" bezeichneten Änderungsprozesse wiedergeben.

In Fig. 1a, b, c sind die Verläufe von h , u , ν sowie h_Q , u_Q , ν_Q für $L = 5 \cdot 10^6$ [m] und $\varepsilon = |\varepsilon| = 10^{-1}$, $\delta = |\delta| = 10^{-1}$ als Funktion von t an der Stelle $x = 0$ dargestellt.

Es ergibt sich die für die zeitliche Entwicklung atmosphärischer Felder allgemein charakteristische Tatsache, daß der Verlauf der kurzdauernden Schwankungen um einen zeitlich zügigen Gang in den meteorologischen Elementen wesentlich bestimmt wird durch die — im Modell durch ε und δ definierten — ageostrophischen Windfelder, die man in der Ausgangssituation vorfindet, während die —

durch h_Q , u_Q , v_Q wiedergegebenen — zügigen Verläufe weitgehend durch die Druckverteilung zur Ausgangszeit festgelegt werden.

So ergibt sich mit den Näherungen (19a) bei einer Auslenkung des Anfangswindfeldes v^0 gegenüber dem geostrophischen Windfeld v_g^0 um $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\nu\varphi_\varepsilon}$ für h_Q eine reelle Amplitude von

$$|A_1| = \sqrt{1 + \left(\frac{gH}{m} |\varepsilon|\right)^2 - \frac{2gH}{m^2} |\varepsilon| \cos \nu\varphi_\varepsilon}$$

und eine Phasenverschiebung $\nu\alpha$ gegenüber h_Q mit $\varepsilon = 0$, die sich bestimmt aus

$$\sin \nu\alpha = |A_1|^{-1} \cdot \frac{gH}{m^2} |\varepsilon| \sin \nu\varphi_\varepsilon,$$

worin φ_ε den Winkel der im allgemeinen komplexen Zahl ε bedeutet. Bei einer Beschränkung von $|\varepsilon| \leq 10^{-1}$ ergibt sich, daß die Partialwelle in h_Q eines durch $\varepsilon = |\varepsilon| e^{i\nu\varphi_\varepsilon}$ charakterisierten Anfangsfeldes gegenüber einem durch $\varepsilon = 0$ definierten Anfangsfelde in v^0 eine Amplituden- und Phasenänderung erfährt, deren Betrag beschränkt bleibt durch

$$|\Delta A_1| \leq |\varepsilon| \frac{gH}{m^2}, \quad |\sin \nu\alpha| \leq |\varepsilon| \frac{gH}{m^2}.$$

Die gleichen Abschätzungen ergeben sich auch für die Amplituden B_1 , C_1 der Funktionen u_Q , v_Q .

Die Tabelle 3 gibt diese maximalen Beträge für $|\varepsilon| = 10^{-1}$ in Abhängigkeit von der Wellenlänge wieder.

Tab. 3. Maximale Amplitudenänderung und Phasenverschiebung, hervorgerufen durch eine Auslenkung des Anfangswindfeldes v^0 um $\varepsilon = 10^{-1} e^{i\nu\varphi_\varepsilon}$ gegenüber dem geostrophischen Windfeld.

L]10 ⁶ m[	Maximale relative Amplitudenänderung $ \Delta A_1 $	Maximale Phasen- verschiebung 10 $ \nu\alpha $
30	2,6 %	1,5°
25	3,4 %	2,0°
20	4,4 %	2,5°
15	5,8 %	3,3°
10	7,6 %	4,4°
5	9,3 %	5,4°
1	10,0 %	5,7°

Der Einfluß der ageostrophischen Komponente u bzw. δ im Anfangswindfeld auf Am-

plitude und Phase der Funktionen h_Q , u_Q , v_Q ist unerheblich.

Dagegen wächst das Amplitudenverhältnis zwischen kurz- und langperiodischen Schwingungen der Druckfunktion h und der ageostrophischen Komponente u — für kurze Wellen näherungsweise ausdrückbar durch

$$\frac{|A_2 - A_3|}{A_1} \text{ bzw. } \frac{|B_2 + B_3|}{|B_1|} \text{ —}$$

bei festgehaltenem δ — der Einfluß von ε ist bei kurzen Wellen unerheblich — mit abnehmender Wellenlänge stark an, so daß bereits bei Wellenlängen in der Größenordnung von einigen 1000 km, wie Fig. 1a, b veranschaulichen, nicht mehr lediglich von einer durch den meteorologischen Lärm bewirkten Unruhe im zeitlichen Gang der meteorologischen Elemente gesprochen werden kann.

Es muß jedoch beachtet werden, daß sowohl δ als auch ε nicht unabhängig von der Wellenlänge angenommen werden können, da sicherlich allgemein

$$\lim_{L \rightarrow 0} \delta = 0 \text{ und } \lim_{L \rightarrow 1} \varepsilon = 1 \text{ gilt.}$$

Das ergibt sich schon daraus, daß die Lösungen (11, 17, 18) mit $\delta \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 1$ in die Lösungen der Differentialgleichungen für reine Gravitationswellen, bzw. bei Annahme adiabatischer Zustandsänderungen in die Lösungen der Diff. Gl. für Schallwellen konvergieren, die ja für sehr kleine Wellenlängen die tatsächlichen physikalischen Vorgänge richtig beschreiben.

Weiterhin dürfte durch Superposition mehrerer Wellenfunktionen verschiedener Wellenlänge und Phase eine Glättung der kurzperiodischen Lärmschwankungen bewirkt werden.

Da den kurzdauernden Schwankungen wegen der Ungenauigkeit in den Meßdaten für u , v , z. Zt. $t = 0$ keine meteorologische Bedeutung beigemessen werden kann, wird man sich bei der rechnerischen Prognose mit der Ermittlung des zeitlichen zügigen Grundverlaufs — im Modell charakterisiert durch die Funktionen h_Q , u_Q , v_Q — begnügen müssen.

Dieser zügige Grundverlauf soll abkürzend als "Trend" bezeichnet werden, analog der

Ausdrucksweise in der statistischen Konjunkturforschung.

Ignoriert man also diese kurzperiodischen Vorgänge h_L , u_L , v_L und sieht man von dem geringen Einfluß ab, den die Anfangsfelder der ageostrophischen horizontalen Windkomponenten auf den Verlauf der Funktionen h_Q , u_Q , v_Q ausüben, so bestimmt sich der Trend der Variablen h , u , v in dem betrachteten Modell lediglich durch die Vorgabe der Druckfunktion h^0 zu einem bestimmten Zeitpunkt, und zwar erhält man mit diesen Vernachlässigungen für

$$\begin{aligned}\bar{h} &= h_0 e^{i\nu(x-c_1t)} \\ \bar{u} &= \frac{g\nu^2}{l^2} dh_0 e^{i\nu(x-c_1t)} \\ \bar{v} &= \frac{g\nu}{l^2} ih_0 e^{i\nu(x-c_1t)},\end{aligned}\quad (20)$$

wenn unter den gestrichenen Größen die oben definierten ausgeglichenen Variablen verstanden werden. Für ein beliebiges Ausgangsfeld h^0 ergibt sich durch Summation über ν :

$$\begin{aligned}\bar{h} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} h_{0\nu} e^{i\nu(x-c_1t)} \\ \bar{u} &= \frac{g}{l^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu^2 d_n h_{0\nu} e^{i\nu(x-c_1t)} \quad n = \frac{L\nu^*}{2\pi} \\ \bar{v} &= \frac{g}{l} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \nu h_{0\nu} e^{i\nu(x-c_1t)}\end{aligned}\quad (20a)$$

In den Lösungen der linearisierten Gleichungen ergibt sich diese Darstellung einfach durch Wegstreichen der den meteorologischen Lärm zum Ausdruck bringenden Funktionen h_L , u_L , v_L sowie der die ageostrophischen Komponenten (ε , δ) enthaltenden Terme in den Amplituden A_1 , B_1 , C_1 .

Da die Funktionen (20a) für alle Anfangslagen, bei denen die Felder der horizontalen Windgeschwindigkeiten nur unwesentlich aus dem geostrophischen Windfeld ausgelenkt sind, die Lösungen der Differentialgleichungen (1—3) mit für synoptische Belange ausreichender Genauigkeit beschreiben dürften, so ist es naheliegend, die Differentialgleichungen von vornherein so zu modifizieren, daß deren

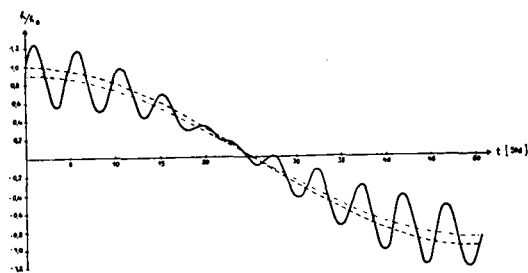


Fig. 1 a. Lärm- und Trendkurven der Funktion h

$$\begin{aligned}\text{—} & \quad h/h_0 \quad L = 5 \cdot 10^6 \text{ m}, \varepsilon = \delta = 10^{-1} \\ \text{---} & \quad h/h_0 \quad U = 15 \text{ m sec}^{-1}, gH = 8 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \\ \text{-} \cdot \text{-} \cdot \text{-} & \quad h_Q/h_0 \quad l = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}\end{aligned}$$

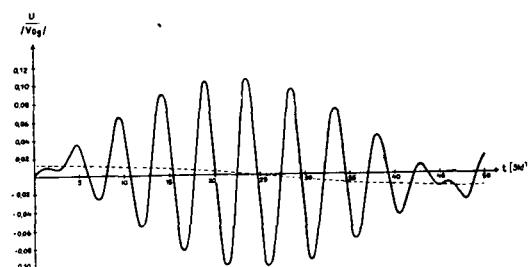


Fig. 1 b. Lärm- und Trendkurven der Funktion u

$$\begin{aligned}\text{—} & \quad u/v_{og} \quad L = 5 \cdot 10^6 \text{ m}, \varepsilon = \delta = 10^{-1} \\ \text{---} & \quad \bar{u}/v_{og} \quad U = 15 \text{ m sec}^{-1}, gH = 8 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \\ \approx u_Q/v_{og} & \quad l = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}\end{aligned}$$

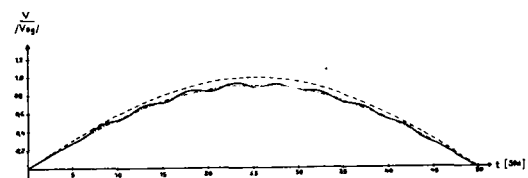


Fig. 1 c. Lärm- und Trendkurven der Funktion v

$$\begin{aligned}\text{—} & \quad v/v_{og} \quad L = 5 \cdot 10^6 \text{ m}, \varepsilon = \delta = 10^{-1} \\ \text{---} & \quad \bar{v}/v_{og} \quad U = 15 \text{ m sec}^{-1}, gH = 8 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \\ \text{-} \cdot \text{-} \cdot \text{-} & \quad v_Q/v_{og} \quad l = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}\end{aligned}$$

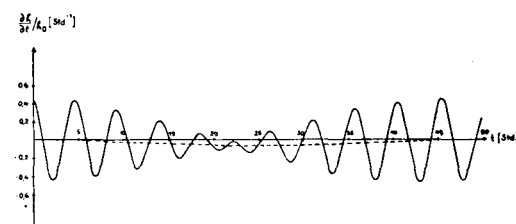


Fig. 1 d. Lärm- und Trendkurven der Funktion $h = \frac{dh}{dt}$

$$\begin{aligned}\text{—} & \quad h_t/h_0 \quad L = 5 \cdot 10^6 \text{ m}, \varepsilon = \delta = 10^{-1} \\ \text{---} & \quad \bar{h}_t/h_0 \quad U = 15 \text{ m sec}^{-1}, gH = 8 \cdot 10^4 \text{ m}^2 \text{ sec}^{-2} \\ \approx (h_Q)_t/h_0 & \quad l = 10^{-4} \text{ sec}^{-1}\end{aligned}$$

Lösungen nur die Trendkurven liefern, wie sie im benutzten Modell durch die Näherungen (20a) beschrieben werden, ein Rechenverfahren, das auf die direkte Messung oder Berechnung von Windfeldern der Ausgangswetterlage verzichtet.

Die zu den Lösungen (20a) zugeordneten Differentialgleichungen anstelle der Gln. (1—3) ergeben sich, wenn $c_1 = U - d$ durch $U \left(1 - \frac{l^2}{v^2 m^2}\right)$ angenähert wird, zu

$$\bar{u} = -\frac{g}{l^2} D\bar{h}_x \quad (21)$$

$$\bar{v} = \frac{g}{l} \bar{h}_x \quad (22)$$

$$D\bar{h} = \frac{lU}{g} \bar{v} - H\bar{u}_x \quad (23)$$

bzw. in auf die Variable h reduzierter Form

$$D\bar{h}_{xx} - \frac{l^2}{gH} \bar{h}_t = 0 \quad (24)$$

Die Mitnahme der ageostrophischen Windkomponente $\bar{u}$ in dem Vektor $\bar{v}$ ist in diesen Gleichungen nur erforderlich, wenn die zeitliche Entwicklung der meteorologischen Variablen berechnet werden soll. Wie die Tab. 1 ausweist, macht die ageostrophische Komponente $\bar{u}$ nur wenige Prozent der geostrophischen Komponente $\bar{v}$ aus, so daßes bei Betrachtung des Windfeldes selbst ausreicht, aus der vorliegenden Lösung für h bzw. p den geostrophischen Wind durch Gradientbildung zu errechnen und den tatsächlichen Wind durch diesen zu approximieren.

V. Numerische Integration

Wegen der erheblichen mathematischen Schwierigkeiten, die der Lösung der allgemeinen nicht vereinfachten nichtlinearen hydro- und thermodynamischen Gleichungen entgegenstehen, wird man gezwungen sein, wenigstens näherungsweise eine Lösung durch eine numerische schrittweise Integration herbeizuführen.

Man begnügt sich zunächst mit der Errechnung der Tendenz der meteorologischen

Variablen $\frac{\partial \psi}{\partial t}$, wenn ψ eine beliebige meteorologische Variable bezeichnet, ersetzt dann näherungsweise den zeitlichen Differentialquotienten durch den entsprechenden Differenzen-

quotienten $\frac{\Delta \psi}{\Delta t}$ und ermittelt durch Annahme

eines festen Wertes für Δt die während der Zeit Δt eintretende Änderung $\Delta \psi$, die man zu dem zur Zeit $t = 0$ vorgefundenen Wert von ψ addiert.

Durch fortgesetzte Anwendung dieses Rechenverfahrens erhält man eine diskrete Folge von Feldern $\psi (t = 0; \Delta t; 2\Delta t; 3\Delta t \dots)$, die bei hinreichend klein gewählten Intervallen Δt die Lösung der Differentialgleichung hinreichend genau zu approximieren vermögen.

Es bieten sich dabei zwei hinsichtlich des Grades der Rechenschwierigkeit und des Umfangs der auszuführenden Integrationsschritte unterschiedliche Rechenverfahren an, je nachdem ob die zeitliche Änderung der Momentanwerte $\frac{\partial \psi}{\partial t}$ oder die zeitliche Änderung des Trends $\frac{\partial \bar{\psi}}{\partial t}$ berechnet wird.

Es besteht also die Möglichkeit, die Diff. Gln. in den Momentanwerten oder in den zeitlich ausgeglichenen Werten anzuschreiben.

1. Für das gewählte Modell einer homogenen Atmosphäre führt die erste Berechnungsmethode auf das folgende Rechenschema, das sich unmittelbar durch Auflösung der Gln. (1—3) nach den lokalen zeitlichen Differentialquotienten ergibt:

$$u_t = -Uu_x - gh_x + lv \approx \frac{\Delta u}{\Delta t} \quad (25a)$$

$$v_t = -Uv_x - lu \approx \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad (25b)$$

$$h_t = -Uh_x + \frac{lU}{g} v - Hu_x \approx \frac{\Delta h}{\Delta t} \quad (25c)$$

Diese Gleichungen erfassen sowohl den ausgeglichenen zügigen Grundverlauf (Trend) als auch die kurzperiodischen Oszillationen (Lärm). Bei der Wahl des Zeitinkrementes Δt ist deshalb zu berücksichtigen, daß die ermittelten Differentialquotienten nur während einer relativ kurzen Zeitspanne als konstant betrachtet werden können.

In Fig. 1d ist $\frac{\partial h}{\partial t}$ und $\frac{\partial \bar{h}}{\partial t}$ als Funktion der Zeit dargestellt. Beide Werte unterscheiden sich in ihrer Größe erheblich, $\left| \frac{\partial h}{\partial t} \right| \gg \left| \frac{\partial \bar{h}}{\partial t} \right|$, weshalb auch bei der prognostischen Verwertung der entsprechenden Differenzenquotienten in gleicher Weise unterschiedliche Zeitintervalle verwendet werden müssen.

Zu einer sinnvollen Festsetzung des Inkrementes Δt gelangt man, wenn $\Delta t \ll T$ gewählt wird.

Bei Verwendung der Berechnungsgleichungen (25) führt dies zu

$$\Delta t \ll T_{2,3} = \frac{L}{M}.$$

Stellt $L_{\min}$ die kürzeste Wellenlänge dar, auf deren Erfassung gerade noch Wert gelegt wird, bzw. deren Ermittlung aus dem Beobachtungsmaterial des Stationsnetzes gerade noch möglich ist, so ergibt sich für

$$\Delta t \ll \frac{L_{\min}}{M}.$$

$L_{\min}$ wird für großräumige (zirkumpolare) Darstellungen in der Größenordnung 10^6 [m] liegen, so daß — vgl. Tab. 2. — $\Delta t \ll 1$ [Std] zu wählen wäre. Der Vorteil dieses Berechnungsschemas liegt darin, daß zur Ermittlung der Tendenzen nur elementare Rechenprozesse (vier Spezies, räumliche Differentiationen 1. Ordnung) erforderlich sind, die ohne sonderliche Schwierigkeiten durch automatische Rechenmaschinen ausgeführt werden können.

Die zwangsläufige Mitberechnung der kurzdauernden Lärmprozesse — ausgezogene Kurven der Fig. 1 — stellt dabei lediglich ein notwendiges Übel dar, da den ermittelten Funktionen h_L , u_L , v_L , die näherungsweise auch bei einer numerischen Integration der Gln. (25) erfaßt werden, so lange keinerlei physikalische Realität zukommt, als auch die Abweichung vom geostrophischen Windfeld im Ausgangsfelde meßtechnisch nicht erfaßt werden kann.

Um nicht eine übertriebene Genauigkeit vorzutauschen, wird es notwendig sein, nach Ermittlung des zeitlichen Verlaufs der meteorologischen Variablen diese völlig unsicheren

Bestandteile durch Glättung mit den üblichen Methoden der Statistik wieder zu eliminieren.

Bei der praktischen Berechnung wird man also willkürliche, sich nur im Rahmen der Meßfehler haltende Werte für ε , δ annehmen können, ohne daß die Genauigkeit der mittleren Verläufe — $\bar{h}$, $\bar{u}$, $\bar{v}$ — merklich beeinträchtigt wird. Naheliegenderweise wird man als Ausgangsfeld für die horizontalen Windgeschwindigkeiten das geostrophische Windfeld zugrunde legen, ohne daß jedoch diese berechneten Winddaten für den Verlauf der Trendkurven oder -felder kritisch sind.

Der Nachteil des Rechenverfahrens besteht darin, daß nur relativ kurze Zeitintervalle (einige Minuten) verwendet werden können. Dieser Nachteil wird jedoch weitgehend ausgeglichen durch die Einfachheit der erforderlichen Rechenprozesse.

2. Bei Verwendung der hydro- und thermodynamischen Diff. Gln. mit ausgeglichenen Größen führt das Berechnungsschema bei Anwendung auf das betrachtete homogene Modell auf die Gln. (21–23) bzw. Gl. (24), aus welcher man die Tendenz des Trends in h durch Auflösung nach $\bar{h}_t$ mit der formalen Lösung

$$\bar{h}_t = \frac{U \bar{h}_{xx}}{\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{l^2}{gH}} \text{ gewinnt.}$$

Der Vorteil eines solchen Rechenverfahrens, in dem die Elimination der kurzperiodischen Schwankungen bereits in der differentiellen Form der Gleichungen, nicht erst in den Lösungsfunktionen vorgenommen wird, besteht darin, daß wesentlich größere Zeitintervalle Δt bei Ersatz des Differentialquotienten durch den Differenzenquotienten verwendet werden können.

Mit den gleichen Abschätzungen wie unter 1) ergibt sich wegen der größeren Schwingungsdauer T_1 für

$$\Delta t \ll \frac{L_{\min}}{c_1} \approx 19 \text{ Std.}$$

Die Anzahl der zur Überbrückung des gleichen Vorhersagezeitaums notwendigen Integrationsschritte nach Verfahren 2) reduziert sich also gegenüber dem Verfahren 1) um rund das 20-fache.

Andrerseits erfährt jedoch das Berechnungsschema insofern eine für den Rechenaufwand wesentlich ins Gewicht fallende Komplikation, als bereits zur Ermittlung der Tendenz die Lösung einer Differentialgleichung — im Modell Gl. (24) — erforderlich wird.

Die sinngemäßen nichtlinearisierten und nicht spezialisierten Diff. Gln., die sich nach Elimination des Lärmes ergeben, lauten entsprechend Gln. (21—23):

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathfrak{B}} &= f x \frac{g}{l} \nabla \bar{h} - \frac{g}{l^2} \frac{\bar{d}}{dt} \nabla \bar{h}, \text{ oder bei Ver-} \\ &\quad \text{wendung der Druckfunktion } p. \\ \bar{\mathfrak{B}} &= f x \frac{1}{l q} \nabla \bar{p} - \frac{1}{l^2} \frac{\bar{d}}{dt} \frac{1}{q} \nabla \bar{p}, \quad \frac{\bar{d}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \\ &\quad + \bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla_3 \text{ und} \end{aligned} \right\} \quad (26a)$$

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial t} = - \nabla_3 \bar{q} \bar{\mathbf{v}},$$

$\bar{\mathfrak{B}}, \nabla = 2$ dimensionale Vektoren

$\bar{\mathbf{v}}, \nabla_3 = 3$ dimensionale Vektoren

(26b)

zu denen noch die dritte Komponente der Bewegungsgleichung, die in Form der statischen Grundgleichung eingeführt werden könnte, sowie eine thermodynamische Diff. Gl. tritt.

Die Elimination der Lärmvorgänge im allgemeinen Fall führt demnach darauf hinaus, in dem Diff. Gl. System die Bewegungsgleichungen für die horizontalen Komponenten zu ersetzen durch die durch H. PHILIPPS (1939) aufgestellte sogenannte quasigeostrophische Windgleichung (26a), die nach Linearisierung unmittelbar auf die Form der Gln. (25a, 25b) führt.

Es kann zur Zeit nicht abgeschätzt werden, welches Verfahren für eine praktische rechnerische Wettervorhersage rationeller sein wird, da dies wesentlich von der technischen Leis-

tungsfähigkeit der zur Verwendung gelangenden Rechenmaschinen abhängen wird. Jedoch dürfte auch das im allgemeinen als wenig aussichtsreich betrachtete Verfahren der numerischen Integration des ursprünglichen Gleichungssystems unter Mitnahme meteorologischer Lärmvorgänge bei Einsatz sehr schnell rechnender Automaten erfolgversprechend sein.

Bei einer Behandlung der Gleichungen im zweidimensionalen Rahmen wird die Auflösung einer immerhin sehr komplizierten Diff. Gl. erspart, im dreidimensionalen Falle — bei Ersatz der vertikalen Komponente der Bewegungsgleichung durch die statische Grundgleichung, der eine Elimination der in vertikaler Richtung verlaufenden kurzperiodischen Schallvorgänge bewirkt, — wird man lediglich auf die Notwendigkeit einer Integration über die vertikale Koordinate, also auf die Lösung einer gewöhnlichen Diff. Gl. geführt, in welcher die horizontalen Koordinaten als Parameter auftreten. Ein für eine numerische Integration geeignetes Gleichungssystem unter Einschluss meteorologischer Lärmvorgänge in der Horizontalen wurde von A. ELIASSEN (1949) angegeben.

Die Unkenntnis in den Ausgangsfeldern der Windgeschwindigkeit ist dabei, zumindest für höhere Breiten, kein ernsthaftes Hindernis, da diese Felder ohne Bedenken durch das durch den Kräftegleichgewichtszustand definierte geostrophische Windfeld ersetzt werden können.

LITERATUR

- CHARNEY, I. G., 1949: On a physical basis for numerical prediction of large-scale motions in the atmosphere. *Journ. of Met.*, **6**, 6, pp. 371—385.
- ELIASSEN, A., 1949: The quasistatic equations of motion with pressure as independent variable. *Geof. Publ.* **12**, 3.
- PHILIPPS, H., 1939: Die Abweichung vom geostrophischen Wind. *Meteor. Z.*, **56**, pp. 460—483.