

Le bilan de la rotationnelle absolue dans l'atmosphère

Par J. VAN MIEGHEM, Université de Bruxelles

(Manuscrit reçu le 27 Juillet 1951)

Abstract

The equation of balance of the absolute vorticity is derived from V. Bjerknes' Circulation Theorem, formulated in an arbitrary moving frame of general coordinates. The flux and the rate of production of absolute vorticity are defined. The case of the component of absolute vorticity normal to the equiscalar surfaces of a meteorological quantity is considered. From the expression of the horizontal convective flux of the vertical component of the relative vorticity, a relation between the horizontal meridional flows of relative vorticity and angular momentum is deduced.

Rapportons l'atmosphère à un système de coordonnées curvilignes quelconques (x^1, x^2, x^3) , animé d'un mouvement variable d'un point à un autre et d'un instant à un autre. Désignons respectivement par V_i , v_i et W_i , ($i = 1, 2, 3$), les composantes covariantes en variables x^i de la vitesse $\mathbf{V}$ de l'air par rapport au système de référence inertiel (système géocentrique fixe), de la vitesse $\mathbf{v}$ de l'air par rapport au référentiel mobile (x^1, x^2, x^3) , et de la vitesse $\mathbf{W}$ du référentiel mobile par rapport au référentiel fixe, ($V_i = W_i + v_i$). Soient $\gamma_{ij} \equiv \gamma_{ji}$ ($i, j = 1, 2, 3$) les coefficients de la métrique en variables x^i et $\gamma^{ij} \equiv \gamma^{ji}$ les mineurs algébriques normés des éléments γ_{ij} du déterminant $\gamma \equiv \|\gamma_{ij}\|$. Les γ_{ij} , γ^{ij} et γ sont des fonctions des x^i et aussi du temps t lorsque le référentiel (x^1, x^2, x^3) se déforme tout en se mouvant; par contre, lorsque ce référentiel se meut à la manière d'un corps solide, les γ^{ij} , γ_{ij} et γ sont indépendants du temps t . Rappelons que $\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \gamma}{\partial t} = \text{div } \mathbf{W}$ (VAN MIEGHEM et VANDENPLAS, 1950).

Ensuite, introduisons les composantes contravariantes ξ^k de la rotationnelle absolue $\text{rot } \mathbf{V}$, on sait que

$$\sqrt{\gamma} \xi^k \equiv V_{ij} \equiv \frac{\partial V_j}{\partial x^i} - \frac{\partial V_i}{\partial x^j} \equiv -V_{ji}, \quad (1)$$

où (i, j, k) représente une permutation tournante de $(1, 2, 3)$ (loc. cit.). Rappelons que $\xi^k : \sqrt{\gamma} \xi^k$ est la projection orthogonale du vecteur $\text{rot } \mathbf{V}$ sur la normale à la surface de coordonnées $x^3 = \text{Cste}$ au point considéré. Notons encore l'identité évidente

$$\frac{\partial \sqrt{\gamma} \xi^k}{\partial x^k} \equiv 0, \quad (k = 1, 2, 3) \quad (1')$$

en x^i et t .

Enfin, soient p la pression atmosphérique, α le volume spécifique de l'air et F_i les composantes covariantes de la force de frottement $\mathbf{F}$. Posons

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial x^i} \frac{\partial \alpha}{\partial x^j} - \frac{\partial p}{\partial x^j} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i} &\equiv \sqrt{\gamma} s^k \text{ et} \\ \frac{\partial F_j}{\partial x^i} - \frac{\partial F_i}{\partial x^j} &\equiv \sqrt{\gamma} f^k, \end{aligned} \quad (2)$$

où, comme dans (1), (i, j, k) est une permutation tournante quelconque déduite de $(1, 2, 3)$.

Alors, le théorème de la circulation de V. Bjerknes s'écrit, (loc. cit.)

$$\frac{d(\xi_N \delta\sigma)}{dt} = (s_N + f_N) \delta\sigma, \quad (3)$$

où ξ_N , s_N et f_N sont les projections orthogonales des vecteurs $\text{rot}\mathbf{V}$, $\mathbf{s}$ et $\text{rot}\mathbf{F}$ sur la demi-normale $\mathbf{N}$ à l'élément $\delta\sigma$ de la surface σ prise à l'instant t , ($\delta t \equiv 0$).

En remarquant que

$$\xi_N \delta\sigma \equiv \xi^k N_k \delta\sigma = \sqrt{\gamma} \xi^k \delta x^i \delta x^j = V_{ij} \delta x^i \delta x^j, \quad (4)$$

où (i, j, k) représente une permutation tournante de $(1, 2, 3)$ et où N_k sont les composantes covariantes du vecteur-unité $\mathbf{N}$ porté par la normale $\mathbf{N}$, on établit aisément (loc. cit.) que

$$\frac{d(\xi_N \delta\sigma)}{dt} = \left(\frac{dV_{ij}}{dt} + V_{ij} \frac{\partial v^l}{\partial x^i} + V_{il} \frac{\partial v^j}{\partial x^j} \right) \delta x^i \delta x^j. \quad (i, j, l = 1, 2, 3) \quad (5)$$

En transformant $(s_N + f_N) \delta\sigma$ comme $\xi_N \delta\sigma$ a été transformé en (4) et en substituant (5) dans (3), on trouve la forme rotationnelle des équations de la dynamique atmosphérique en variables x^i , à savoir:

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{d\sqrt{\gamma} \xi^k}{dt} + \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \xi^k - \frac{\partial v^k}{\partial x^i} \xi^i = s^k + f^k; \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (6)$$

d'où, finalement, grâce à (1'), l'équation du bilan de la composante ξ^k de la rotationnelle absolue $\text{rot}\mathbf{V}$,

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma} \xi^k}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{\gamma} (\xi^k v^i - v^k \xi^i)] = s^k + f^k, \quad (i, k = 1, 2, 3) \quad (6a)$$

ou encore,

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial \sqrt{\gamma} \xi^k}{\partial t} + \text{div} (\xi^k \mathbf{v} - v^k \text{rot} \mathbf{V}) = s^k + f^k. \quad (6b)$$

De ce bilan, il résulte que le flux, dans le référentiel mobile, de la composante ξ^k de la

rotationnelle absolue $\text{rot}\mathbf{V}$ est défini par les composantes contravariantes

$$C^{ki} \equiv \xi^k v^i - v^k \xi^i, \quad (7)$$

et que le taux de production de ξ^k , dans ce référentiel, s'exprime à l'aide de $s^k + f^k$, c'est-à-dire à l'aide des solénoïdes isobares-isostères et des tubes de tourbillon de la force de frottement $\mathbf{F}$.

Remarquons que $C^{kk} \equiv 0$ et que, par suite, le flux de ξ^k à travers la surface $x^k = C^{ste}$ est nul. De plus, le flux C^{ki} , ($i \neq k$), se décompose en un flux convectif $\xi^k v^i$ le long du courant atmosphérique dans la surface $x^k = C^{ste}$ et en un flux non convectif $-v^k \xi^i$ qui dépend du courant atmosphérique v^k à travers la surface $x^k = C^{ste}$. Lorsque la surface $x^k = C^{ste}$ est une surface substantielle ($\frac{dx^k}{dt} \equiv v^k \equiv 0$) le flux non convectif est nul.

2. Supposons qu'à chaque instant t , les surfaces équiscalaires d'une grandeur météorologique, — la température potentielle Θ par exemple, — constituent une famille de surfaces à un paramètre. Identifions ces surfaces avec les surfaces de coordonnées $x^3 = C^{ste}$ et, leurs trajectoires orthogonales avec les lignes de coordonnée $x^3 = \text{var}$. On a, alors, $\gamma_{31} \equiv \gamma_{32} \equiv \gamma_{31} \equiv \gamma_{32} \equiv 0$, $\gamma_{33} \gamma_{33} \equiv 1$, $\gamma \equiv \gamma_{33} \gamma_{33}$ avec $\gamma_{33} \equiv \gamma_{11} \gamma_{22} - (\gamma_{12})^2$, et

$$\zeta \equiv \frac{\xi^3}{\sqrt{\gamma_{33}}} \equiv \sqrt{\gamma_{33}} \xi^3 \equiv \text{rot}_z \mathbf{V}, \quad v_z \equiv \sqrt{\gamma_{33}} v^3, \quad (8)$$

où ζ et v_z ne sont autres que les projections orthogonales de $\text{rot}\mathbf{V}$ et de $\mathbf{v}$ sur la normale z à la surface $x^3 = C^{ste}$ passant par le point considéré. Cette normale est tangente à la ligne de coordonnée $x^3 = \text{var}$. En particulier,

lorsque $x^3 \equiv \Theta$, on a $v^3 \equiv \frac{d\Theta}{dt}$ et $\sqrt{\gamma_{33}} \equiv |\nabla\Theta|$

où $|\nabla\Theta|$ est la valeur algébrique de l'ascendant de la température potentielle Θ .

En substituant (8) dans (6a), on obtient le bilan de ζ ,

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma_{33}}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_{33}} \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_{33}}} \frac{\partial [\sqrt{\gamma_{33}} (\zeta v^\alpha - v_z \xi^\alpha)]}{\partial x^\alpha} = s_z + f_z, \quad (\alpha = 1, 2) \quad (9)$$

ou encore,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_*} \zeta}{\partial t} + \frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \frac{\partial (\sqrt{\gamma_*} \zeta v^a)}{\partial x^a} + \\ & + \frac{v_z}{\sqrt{\gamma_*}} \frac{\partial (\sqrt{\gamma_*} \zeta)}{\partial z} - \frac{\partial v_3}{\partial x^a} \sqrt{\gamma_{33}} \zeta^a = s_z + f_z \end{aligned} \quad (9a)$$

où $\partial z \equiv \sqrt{\gamma_{33}} \partial x^3$ et où s_z et f_z sont les nombres de solénoïdes isobares-isostères et de tubes-unités de tourbillon de la force de frottement par unité d'aire, dans les surfaces $x^3 = Cste$. La somme $s_z + f_z$ représente le taux de production de ζ dans $x^3 = Cste$.

Lorsque, dans l'équation (9a), on néglige les

termes en $\frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_*}}{\partial t}$, $\frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_*}}{\partial z}$ et en γ_{33} , on

obtient une équation établie par S. PETTERSSSEN (1950). Cette remarque fixe le degré de validité de l'équation de Petterssen. Notons que

$\frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_*}}{\partial t}$ exprime la déformation subie par

les surfaces $x^3 = Cste$ et que $-\frac{1}{\sqrt{\gamma_*}} \frac{\partial \sqrt{\gamma_*}}{\partial z}$ re-

présente la courbure moyenne de ces surfaces.

3. Proposons-nous d'étudier le flux de la composante ζ de la rotationnelle dans le cas de coordonnées curvilignes triorthogonales (x^1, x^2, x^3). Dans ce cas, on a: $\gamma_{ij} \equiv \gamma^{ij} \equiv 0$ pour $i \neq j$ et $\gamma^{ii} \gamma_{ii} \equiv 1$ respectivement pour $i = 1, 2, 3$. Désignons par x, y, z les axes tangents aux lignes de coordonnée x^i et par v_x, v_y, v_z les composantes coordonnées de la vitesse relative $\mathbf{v}$ de l'air dans le trièdre trirectangle xyz , supposé dextrogyre. Les axes x, y, z sont normaux respectivement aux surfaces $x^1 = Cste$, $x^2 = Cste$, $x^3 = Cste$. On a donc $v_x \equiv \sqrt{\gamma_{11}} v^1 = v_1 : \sqrt{\gamma_{11}}$, $v_y \equiv \sqrt{\gamma_{22}} v^2 = v_2 : \sqrt{\gamma_{22}}$, $v_z \equiv \sqrt{\gamma_{33}} v^3 = v_3 : \sqrt{\gamma_{33}}$, $\partial x \equiv \sqrt{\gamma_{11}} \partial x^1$, $\partial y \equiv \sqrt{\gamma_{22}} \partial x^2$, $\partial z \equiv \sqrt{\gamma_{33}} \partial x^3$,

et

$$\zeta \equiv 2 \omega_z + \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11} \gamma_{22}}} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x^1} - \frac{\partial v_1}{\partial x^2} \right),$$

où ω_z désigne la composante coordonnée suivant l'axe z de la rotation instantanée du trièdre xyz par rapport au référentiel inertiel. Nous avons vu que le flux de ζ se produit dans les surfaces $x^3 = Cste$ et que la partie convective de ce flux s'exprime, dans le trièdre xyz , à l'aide des composantes coordonnées $(\zeta v_x, \zeta v_y, 0)$.

Si nous portons uniquement notre attention sur la partie ζ_* de ζ liée au mouvement de l'air par rapport au référentiel mobile; on voit que

$$\begin{aligned} \zeta_* & \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma_{22}}} \frac{\partial (\sqrt{\gamma_{22}} v_y)}{\partial x} - \\ & - \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}}} \frac{\partial (\sqrt{\gamma_{11}} v_x)}{\partial y} \equiv \text{rot}_z \mathbf{v}, \end{aligned}$$

avec $\zeta \equiv \zeta_* + 2 \omega_z$.

Quant au flux convectif de ζ_* dans le référentiel mobile, il est défini par les composantes coordonnées $(\zeta_* v_x, \zeta_* v_y, 0)$ dans xyz . Remarquons que

$$\left\{ \begin{aligned} \zeta_* v_x &= \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{\partial}{\partial x} (\gamma_{22} v_x v_y) - v_y \text{div}_h \mathbf{v} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_{11}} \frac{\partial}{\partial y} \{ \gamma_{11} [(v_y)^2 - (v_x)^2] \}, \\ \zeta_* v_y &= -\frac{1}{\gamma_{11}} \frac{\partial}{\partial y} (\gamma_{11} v_x v_y) + v_x \text{div}_h \mathbf{v} + \\ & + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma_{22}} \frac{\partial}{\partial x} \{ \gamma_{22} [(v_y)^2 - (v_x)^2] \}, \end{aligned} \right.$$

où

$$\begin{aligned} \text{div}_h \mathbf{v} & \equiv \frac{1}{\sqrt{\gamma_{22}}} \frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{\gamma_{22}} v_x) + \\ & + \frac{1}{\sqrt{\gamma_{11}}} \frac{\partial}{\partial y} (\sqrt{\gamma_{11}} v_y). \end{aligned}$$

On voit ainsi que, dans les surfaces $x^3 = Cste$, le flux convectif de la composante normale $\zeta_* \equiv \text{rot}_z \mathbf{v}$ de la rotationnelle relative $\text{rot} \mathbf{v}$, à travers les lignes $x^1 = \text{var}$ et $x^2 = \text{var}$, dépend en premier lieu de la corrélation, le long de ces lignes, entre les composantes v_x et v_y de la vitesse relative de l'air et de la corrélation, le long des mêmes lignes, entre chacune de ces

composantes et la divergence du courant dans les surfaces $x^3 = Cste$.

En particulier, lorsque le système de référence (x^1, x^2, x^3) est fixe par rapport à la terre et lorsque les coordonnées x^1, x^2, x^3 coïncident avec les coordonnées sphériques λ, φ, r , on a: $\gamma_{11} \equiv r^2 \cos^2 \varphi, \gamma_{22} \equiv r^2, \gamma_{33} \equiv 1$. Le flux méridien Φ , vers le Nord, à travers le parallèle c , de la composante verticale $\zeta_{\star} = \text{rot}_z \mathbf{v}$ de la rotationnelle relative $\text{rot} \mathbf{v}$ par rapport à la terre, est alors donné par

$$\begin{aligned} \Phi &\equiv \oint_c \zeta_{\star} v_y \delta x = \\ &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial}{\partial \gamma} \oint_c r^2 \cos^2 \varphi v_x v_y \delta x + \\ &+ \oint_c v_x \text{div}_h \mathbf{v} \delta x, \end{aligned} \quad (10)$$

où nous avons posé $\delta x \equiv r \cos \varphi \delta \lambda$ et $\frac{\partial}{\partial \gamma} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}$.

La formule (10) montre que le flux Φ dépend 1°) de la corrélation, le long du parallèle c considéré, entre la composante zonale v_x du vent et la divergence horizontale du courant, et 2°) de la variation en latitude de la corrélation, le long du même parallèle, entre les composantes zonale (v_x) et méridienne (v_y) du vent $\mathbf{v}$. En particulier, lorsque les creux et les dorsales bariques sont orientés du SW vers le NE, ces deux corrélations sont positives; de plus, si la déviation vers l'E, par rapport aux méridiens, des creux et des dorsales, diminue lorsque la latitude augmente, la corrélation entre v_x et v_y , le long des parallèles, décroît vers le Nord. Dans ce cas, les termes du second membre de (10) sont positifs et il

en est de même du flux Φ qui est donc dirigé vers le Nord.

Enfin, notons que le flux méridien vers le Nord, à travers le parallèle c , du moment cinétique relatif de l'air par rapport à l'axe de la terre est donné par la formule de Jeffreys

$$\Psi \equiv \oint_c r^2 \cos^2 \varphi \varrho v_x v_y \delta x,$$

où ϱ désigne la masse spécifique de l'air; par conséquent, si l'on fait abstraction de la variation latitudinale de ϱ , on a

$$\Phi \cong - \frac{1}{\bar{\varrho} r^2 \cos^2 \varphi} \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma} + \oint_c v_x \text{div}_h \mathbf{v} \delta x, \quad (10a)$$

où $\bar{\varrho}$ désigne une valeur moyenne de ϱ au niveau r considéré. La relation (10a) fait apparaître le lien entre le flux méridien Φ de la composante verticale de la rotationnelle relative $\text{rot} \mathbf{v}$ de l'air et le flux méridien Ψ du moment cinétique relatif de l'air par rapport à l'axe de la terre.

Le taux de production, par unité de surface horizontale, de la composante verticale $\text{rot}_z \mathbf{v}$ de la rotationnelle relative $\text{rot} \mathbf{v}$, est égal à $s_z + f_z$. Remarquons que s_z est positif ou négatif suivant que la rotation qui amène l'ascendant horizontal $\nabla_h \alpha$ de volume spécifique α de l'air sur le gradient horizontal $-\nabla_h p$ de la pression atmosphérique p est cyclonique ou anticyclonique. Comme $f_z \equiv \text{rot}_z \mathbf{F}$, on en déduit que f_z est positif ou négatif suivant que la composante verticale $\text{rot}_z \mathbf{F}$ de la rotationnelle de $\mathbf{F}$ est cyclonique ou anticyclonique, c'est-à-dire, d'après une remarque de S. PETTERSEN (1950), suivant que la circulation horizontale de l'air au point considéré est anticyclonique ou cyclonique.

BIBLIOGRAPHIE

- PETTERSEN, S., 1950: Some aspects of the general circulation of the atmosphere. *Centenary Proc. Roy. Met. Soc.*, pp. 120—155.
VAN MIEGHEM, J., et VANDENPLAS, A., 1950: Les équations

de la dynamique atmosphérique en coordonnées généralisées. Application au cas des coordonnées sphériques. *Mém. Inst. Roy. Météor. de Belgique*, XLI, 57 p.