

Le mouvement des tourbillons atmosphériques

Par J. van MIEGHEM, Université de Bruxelles

(Manuscrit reçu le 8 mars 1951)

Abstract

The force which acts on an atmospheric vortex depends on its intensity, on the Coriolis parameter and the latitude effect on this parameter. The zonal, meridional and vertical components of this force are linear functions of two correlations: one between the corresponding component of the air velocity and the horizontal divergence of the current and the other, between this same first component and the meridional component of the velocity.

1. Rapportons l'atmosphère à un système quelconque de coordonnées curvilignes (x^1, x^2, x^3), fixe par rapport à la terre. Désignons par γ_{ij} les coefficients de la métrique $(\delta s)^2 \equiv \gamma_{ij} \delta x^i \delta x^j$, par $v^i \equiv \frac{dx^i}{dt}$ les composantes contravariantes de la vitesse $\mathbf{v}$ de l'air, par $v_i \equiv \gamma_{ij} v^j$ les composantes covariantes correspondantes et par ρ la masse spécifique de l'air. En variables x^i , les composantes covariantes j_k de l'accélération $\mathbf{j}$ de l'air s'écrivent

$$\rho j_k \equiv \rho \frac{dv_k}{dt} - \frac{1}{2} \gamma_{ij,k} \rho v^i v^j = \frac{\partial \rho v_k}{\partial t} + [\rho v_k v^i]_{.i}, \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1)$$

compte tenu de l'équation de continuité $\frac{\partial \rho}{\partial t} + [\rho v^i]_{.i} = 0$. Dans (1), la virgule (.) devant l'indice k indique la dérivation partielle $\frac{\partial}{\partial x^k}$ et le point (.) devant l'indice i , la dérivation covariante pour x^i . Rappelons que les indices répétés (par ex., i et j dans (1)) sont des indices de sommation. D'autre part, α étant une grandeur quelconque, on a

$$\rho \alpha j_k = \frac{\partial \rho \alpha v_k}{\partial t} + [\rho \alpha v_k v^i]_{.i} - \rho v_k \frac{d\alpha}{dt}; \quad (2)$$

d'où,

$$\begin{aligned} \iiint_V \rho \alpha j_k \sqrt{\gamma} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 &= \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho \alpha j_k \sqrt{\gamma} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3 + \\ &\quad + \iint_S \rho \alpha v_k v_N \delta S - \\ &\quad - \iiint_V \frac{d\alpha}{dt} \rho v_k \sqrt{\gamma} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3, \quad (3) \end{aligned}$$

les points du volume V et de sa frontière S étant pris à l'instant t , ($\delta t \equiv 0$). Dans (3), γ désigne le déterminant $\|\gamma_{ij}\|$ et v_N , la projection orthogonale de la vitesse de l'air suivant la normale extérieure N à la surface fermée S . Rappelons que $\delta V \equiv \sqrt{\gamma} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$, $N_i \delta S \equiv \sqrt{\gamma} \delta x^k \delta x^l$, où (i, k, l) désigne une suite d'indices déduite de $(1, 2, 3)$ par une permutation tournante, et $v_N \equiv v^i N_i$, où les N_i sont les composantes covariantes du vecteur unité porté par la normale N .

Nous admettrons que la grandeur α ne change pas de signe dans le volume V et que, sur la surface S , on a, soit $\alpha = 0$, soit $v_N = 0$. De plus, nous supposons que les variations locales dans le temps de ρ , α et j_k sont négligeables dans le volume V ; on déduit alors de (3), grâce au théorème de la moyenne et après avoir posé

$$\sigma(\alpha) \equiv \iiint_V \rho \alpha \sqrt{\gamma} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3, \quad (4)$$

l'équation approchée

$$\bar{j}_k \cong - \frac{1}{\sigma(\alpha)} \iiint_V \frac{d\alpha}{dt} \rho v_k \sqrt{\gamma} \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3, \quad (5)$$

où $\bar{j}_k$ est une valeur moyenne de j_k dans V . L'accélération moyenne $\bar{\mathbf{j}}$ exprime la force par unité de masse qui sollicite, à l'instant t , la masse d'air douée de la propriété α et contenue à cet instant, dans le volume V .

2. En particulier, posons $\alpha \equiv q_z$, où q_z est la composante verticale de la rotationnelle $\mathbf{q} \equiv \text{rot } \mathbf{v}$ de la vitesse $\mathbf{v}$ de l'air. Le système de coordonnées qui s'impose ici est

le système de coordonnées sphériques (λ, φ, r) , où, comme d'habitude, λ désigne la longitude, φ , la latitude et r , la distance au centre de la terre. Dans ce cas, on a :

$$x^1 \equiv \lambda, \quad x^2 \equiv \varphi, \quad x^3 \equiv r,$$

$$\gamma_{11} \equiv r^2 \cos^2 \varphi, \quad \gamma_{22} \equiv r^2, \quad \gamma_{33} \equiv 1,$$

$$\gamma_{ij} \equiv 0 \quad (i \neq j), \quad \gamma \equiv r^4 \cos^2 \varphi,$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{1}{r \cos \varphi} \frac{\partial}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial}{\partial y} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \equiv \frac{\partial}{\partial r},$$

$$v_x \equiv \sqrt{\gamma_{11}} v^1 \equiv r \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt},$$

$$v_y \equiv \sqrt{\gamma_{22}} v^2 \equiv r \frac{d\varphi}{dt}, \quad v_z \equiv \sqrt{\gamma_{33}} v^3 \equiv \frac{dr}{dt},$$

$$q_z \equiv \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{v_x}{r} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$\operatorname{div}_h \mathbf{v} \equiv \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_y}{r} \operatorname{tg} \varphi,$$

et finalement,

$$\begin{aligned} \frac{dq_z}{dt} &= - \frac{2 \omega \cos \varphi}{r} v_y - \\ &- (q_z + 2 \omega \sin \varphi) \left(\operatorname{div}_h \mathbf{v} + \frac{2 v_z}{r} \right) + \\ &+ \frac{\partial v_z}{\partial y} (q_y + 2 \omega \cos \varphi) + \frac{\partial v_z}{\partial x} q_x + N_z \cong \\ &\cong - \frac{df}{dy} v_y - f \operatorname{div}_h \mathbf{v}, \end{aligned} \quad (6)$$

où f représente le paramètre de Coriolis $2 \omega \sin \varphi$ et N_z le nombre de solénoïdes isobares-isostères par unité de surface du plan horizontal xy au point considéré. Les termes négligés dans (6) sont au moins dix fois plus petits que les termes conservés.

En substituant (6) dans (5), on trouve, grâce au théorème de la moyenne et à la notation (4),

$$\bar{j}_k \cong \frac{\sigma \left(\frac{df}{dy} \right)}{\sigma(q_z)} \overline{v_k v_y} + \frac{\sigma(f)}{\sigma(q_z)} \overline{v_k \operatorname{div}_h \mathbf{v}}, \quad (7)$$

ou encore, en composantes coordonnées,

$$\left. \begin{aligned} \overline{r \cos \varphi j_x} &\cong \frac{\sigma \left(\frac{df}{dy} \right)}{\sigma(q_z)} \overline{r \cos \varphi v_x v_y} + \\ &+ \frac{\sigma(f)}{\sigma(q_z)} \overline{r \cos \varphi v_x \operatorname{div}_h \mathbf{v}}, \\ \overline{r j_y} &\cong \frac{\sigma \left(\frac{df}{dy} \right)}{\sigma(q_z)} \overline{r (v_y)^2} + \\ &+ \frac{\sigma(f)}{\sigma(q_z)} \overline{r v_y \operatorname{div}_h \mathbf{v}}, \\ \overline{j_z} &\cong \frac{\sigma \left(\frac{df}{dy} \right)}{\sigma(q_z)} \overline{v_y v_z} + \\ &+ \frac{\sigma(f)}{\sigma(q_z)} \overline{v_z \operatorname{div}_h \mathbf{v}}. \end{aligned} \right\} \quad (7a)$$

En raison de la faible épaisseur de l'atmosphère, on peut remplacer, dans (7a), le rayon vecteur r par le rayon moyen de la terre et, de plus, dans la plupart des applications, on pourra substituer à $\cos \varphi$ une valeur moyenne dans V ; d'où, la relation vectorielle approchée

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &\cong \left[\sigma \left(\frac{df}{dy} \right) / \sigma(q_z) \right] \overline{v_y \mathbf{v}} + \\ &+ [\sigma(f) / \sigma(q_z)] \overline{\mathbf{v} \operatorname{div}_h \mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (7b)$$

Remarquons que $\sigma(f) > 0$, $\sigma \left(\frac{df}{dy} \right) > 0$ et

$\sigma(q_z) > 0$ ou < 0 suivant que la masse d'air considérée à l'instant t , dans le volume V , est un tourbillon cyclonique ($q_z > 0$ en tout point de V) ou anticyclonique ($q_z < 0$).

De l'équipollence (7b), il résulte que les composantes zonale, méridienne et verticale de la force qui sollicite un tourbillon sont des fonctions linéaires de deux corrélations: l'une, entre la composante correspondante de la vitesse de l'air et la divergence horizontale du courant et l'autre, entre la même composante et la composante méridienne de la vitesse. Les coefficients de ces fonctions linéaires dépendent de l'intensité du tour-

billon, du paramètre de Coriolis et de sa variation avec la latitude φ .

En appliquant, aux équations (7a), la méthode des approximations météorologiques de J. CHARNEY (1948), on constate que les accélérations horizontales $\bar{j}_x$ et $\bar{j}_y$ sont de l'ordre de 10^{-4} m/sec² (c'est-à-dire, d'un ordre de grandeur inférieur à celui de l'accélération horizontale de Coriolis) et que l'accélération verticale $\bar{j}_z$ est de l'ordre 10^{-7} m/sec² (c'est-à-dire, 10^8 fois moins grande que l'accélération de la pesanteur). L'accélération $\bar{j}_z$ est donc négligeable.

Dans une atmosphère sans divergence horizontale du courant, l'équation (7b) se réduit à

$$\bar{\mathbf{j}} \cong \left[\sigma \left(\frac{df}{d\gamma} \right) / \sigma(q_z) \right] \overline{v_y \mathbf{v}}. \quad (7'b)$$

En projetant cette équipollence sur l'axe γ , on retrouve, sous une autre forme, une formule établie par C.-G. ROSSBY (1948, 1949) dans un cas particulier.

Notons encore que si $|q_z|$ est de l'ordre de grandeur de f — ce qui n'arrive qu'exceptionnellement dans l'atmosphère — il faut remplacer le coefficient de $\text{div}_h \mathbf{v}$ dans le dernier membre de (6) par $-(q_z + f)$ et, dans (7) par $\sigma(q_z + f) / \sigma(q_z)$.

3. Cela étant, considérons une succession de creux et de dorsales bariques, associés aux ondulations du courant zonal des régions tempérées. Désignons par L les masses d'air douées d'une rotation cyclonique dans les creux et, par H , celles douées d'une rotation anticyclonique dans les dorsales. Pour fixer les idées, supposons que les axes des creux et des dorsales ont une déclinaison E et que les ondulations se propagent dans la même direction, ce qui est le cas le plus fréquent. Dans ces conditions, à l' E d'une crête, on a $\text{div}_h \mathbf{v} < 0$ et, à l' W , $\text{div}_h \mathbf{v} > 0$,

(J. BJERKNES et J. HOLMBOE, 1944); il est alors aisé de voir que les corrélations $v_x v_y$, $v_x \text{div}_h \mathbf{v}$ et $v_y \text{div}_h \mathbf{v}$ sont toutes trois positives. Il en résulte, grâce à (7b), que les masses L sont accélérées vers l' E et le N , tandis que les masses H sont accélérées vers l' W et le S .

4. Décomposons le champ du courant $\mathbf{v}$ en un courant zonal permanent $\mathbf{U}(\varphi, r)$ et en un courant de perturbation $\mathbf{u}$. On a donc, $v_x \equiv U + u_x$, $v_y \equiv u_y$ et $v_z \equiv u_z$ et, en posant $Z \equiv -\frac{\partial U}{\partial \gamma} + \frac{U}{r} \tan \varphi + 2 \omega \sin \varphi$, l'équation (6) devient, ζ désignant la composante verticale de $\text{rot } \mathbf{u}$,

$$\frac{d\zeta}{dt} \cong -Z \text{div}_h \mathbf{u} - \frac{\partial Z}{\partial \gamma} u_y - \frac{\partial Z}{\partial z} u_z, \quad (8)$$

et l'équation (7b),

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{j}} \cong & \frac{\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial \gamma} \right)}{\sigma(\zeta)} \overline{u_y \mathbf{v}} + \frac{\sigma \left(\frac{\partial Z}{\partial z} \right)}{\sigma(\zeta)} \overline{u_z \mathbf{v}} + \\ & + \frac{\sigma(Z)}{\sigma(\zeta)} \overline{\mathbf{v} \text{div}_h \mathbf{u}}. \end{aligned} \quad (9)$$

Dans (8) et (9) le terme en u_z est généralement d'un ordre de grandeur inférieur à celui des autres. Comme on a, en général,

$$Z > 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial \gamma} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial Z}{\partial z} > 0,$$

l'application du théorème de la moyenne est justifiée.

En projetant l'équipollence (9) sur l'axe γ , et en négligeant le mouvement vertical de l'air, on retrouve, sous une autre forme, une formule établie par H. L. KUO (1950) dans un cas particulier,

Bruxelles, le 24 février 1951.

BIBLIOGRAPHIE

- BJERKNES, J. and HOLMBOE, J., 1944 : On the Theory of Cyclones. *J. Meteor.*, 1, 1—22.
CHARNEY, J., 1948 : On the Scale of atmospheric motions. *Geof. Publ.*, XVII — 2, 1—17.
HSIAO-LAN-KUO, 1950 : The motion of atmospheric vortices and the general circulation. *J. Meteor.*, 7, 247—258.

- ROSSBY, C.-G., 1948 : On the displacement and intensity changes of atmospheric vortices. *J. Mar. Res.*, 7, 175—187.
— 1949 : On a mechanism for the release of potential energy in the atmosphere. *J. Meteor.*, 6, 163—180.