

Vergleich dreier Differenzen-Verfahren zur numerischen Integration der „primitiven Gleichungen“ für ein barotropes divergentes Modell der Atmosphäre¹

Von G. FISCHER und R. W. EHLERS, *Meteorologisches Institut der Universität Hamburg*

(Manuskript eingegangen am 13. Dezember 1966)

ABSTRACT

Integrations of the hydrostatic system of equations for the divergent barotropic model of an atmosphere confined within latitudinal walls are performed with three finite-difference schemes of second-order accuracy. Scheme I is the so-called leap-frog scheme, commonly used in numerical forecasting, scheme II is based on a method proposed by Lax & Wendroff and N. A. Phillips. Scheme III was discussed by one of the authors. Applying for all schemes the same grid system with respect to the field- and time-coordinates and allowing for no smoothing or friction it is possible to compare objectively the behaviour of the difference equations. Initially a geostrophically balanced jet stream field consisting of three zonal wave numbers is prescribed; the flow is barotropically unstable.

The comparison is made with integrals of (a) eddy kinetic energy, including its spectral parts, (b) zonal kinetic energy, (c) kinetic energy, and (d) total energy. The latter is a conservative property for the differential system. These integrals yield a good insight into the appearance of barotropic instability. This problem will be treated in a subsequent paper. All three methods give practically equal results within the first week of forecasting time; then scheme I begins to show numerical instability followed by scheme III about one week later. Scheme II seems to be completely stable, shows, however, as expected, a slight tendency of damping relatively short waves. Scheme III requires one field less to be stored in the computer than schemes I and II.

1. Einleitung

Die sogenannten primitiven Gleichungen, d. h. die Eulerschen Bewegungsgleichungen in ihrer Grundform, sind in den letzten Jahren in immer stärkerem Umfang für numerische Wettervorhersagen und für die Simulierung der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre herangezogen worden. Besonders bei der numerischen Integration der vielflächigen baroklinen Modelle besitzen die primitiven Gleichungen erhebliche Vorzüge gegenüber den im Prinzip aus Vorticity- und Divergenzgleichung bestehenden, welche in den Anfängen der numerischen Wettervorhersage ausschliesslich benutzt wurden. Die besagten Vorzüge bestehen darin, dass sich das Rechenschema einfacher gestaltet und der physikalische Inhalt weitgehend unberührt bleibt. Letzteres ist bei Benutzung der abgewandelten Gleichungen wegen der not-

wendigen Einführung vereinfachender Annahmen nicht ganz der Fall.

Die vorliegende Untersuchung hat zum Ziel, drei verschiedene Verfahren zur numerischen Integration der primitiven Gleichungen zu testen und miteinander zu vergleichen. Um den Arbeitsaufwand in erträglichen Grenzen zu halten, erschien es angebracht, das vielerseits erprobte physikalische Modell einer zwischen zwei Breitenkreisen eingeschlossenen barotropen divergenten Atmosphäre im hydrostatischen Gleichgewicht zu Grunde zu legen.

Physikalisch handelt es sich bei dieser „Atmosphäre“ um eine inkompressible homogene Flüssigkeit mit freier Ober- und ebener Unterfläche, die durch feste Wände seitlich begrenzt ist.

Abgesehen von der geometrischen Struktur unseres Modells wird die zu Grunde gelegte Konzeption einer autobarotropen Atmosphäre auch heute noch in der kurzfristigen numerischen Wettervorhersage angewandt — mit etwa

¹ Diese Untersuchung wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft gefördert.

demselben Erfolg wie die komplizierteren baroklinen Modelle.

Der Vergleich der drei Verfahren geschieht unter möglichst gleichen Gesichtspunkten, z. B. in Bezug auf die Wahl des Gitternetzes, des Zeitschritts und die Formulierung der Anfangs- und Randbedingungen im numerischen System. Auch wurde nicht versucht, die rechnerische Stabilität des einen oder anderen Verfahrens durch Ausgleichung der Felder oder durch Einführung von Reibungsgliedern zu erhöhen.

Somit ist ein echter Vergleich möglich. Das schliesst natürlich nicht aus, dass eine absolute Verbesserung der Verfahren dadurch erreicht werden kann, dass z. B. die Geschwindigkeit anfänglich nicht, wie es hier getan wird, geostrophisch, sondern mit Hilfe der Balancegleichung aus dem vorgegebenen Druckfeld angenähert wird; auch die numerische Handhabung der Randbedingungen könnte in einer exakteren Weise erfolgen. Dadurch würde zwar die mit der Zeit aufkommende Aufräuhung der Felder verzögert werden, das Rechenschema wäre jedoch wesentlich komplizierter.

Die geometrische Form des Kanals und die dadurch sich anbietende Anwendung der β -Approximation und der Vernachlässigung aller Glieder in den hydrodynamischen Gleichungen, welche die Erdkrümmung enthalten, erlauben eine bequeme Handhabung des Modells in analytischer und numerischer Hinsicht, wobei die wesentlichen dynamischen Merkmale der atmosphärischen Stromfelder erhalten bleiben.

Zur vergleichenden Darstellung der Ergebnisse werden u. a. die zeitlichen Gänge einiger Energiegrößen herangezogen. Hieraus lässt sich z. B. ersehen, wie weit und wie lange die aus den Differentialgleichungen folgende Konstanz der totalen Energie in den numerischen Systemen erhalten bleibt. Einen guten Einblick in die dynamische Natur der Lösungen gibt der zeitliche Verlauf der Energieintegrale für die mittlere zonale Strömung sowie für deren Abweichungen vom zonalen Mittel. Diese beiden Integrale stehen in einem engen Zusammenhang mit dem Problem der hydrodynamischen Instabilität. Über diesen Komplex wird in einer gesonderten Arbeit berichtet werden.

2. Differentialgleichungen

Mit den Annahmen unter 1. lauten die „primitiven“ Gleichungen für das divergente

reibungsfreie barotrope Modell einer im hydrostatischen Gleichgewicht befindlichen Atmosphäre:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla u + f v - \frac{\partial \phi}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= -\mathbf{v} \cdot \nabla v - f u - \frac{\partial \phi}{\partial y}, \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\nabla \cdot (\mathbf{v} \phi) - g \bar{h} \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

x, y sind die rechtwinkligen kartesischen Koordinaten in Längs- und Querrichtung des Kanals, die der Richtung nach Osten und Norden in der Natur entsprechen sollen; u, v die Komponenten der Geschwindigkeit $\mathbf{v}$. Der Coriolisparameter sei linear veränderlich mit y , d. h. $f = f_0 + \beta y$. Die Variable ϕ stellt das Geopotential der freien Oberfläche relativ zum mittleren Niveau $\bar{h}$ der Oberfläche dar, g ist die Erdbeschleunigung und $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$ der Nablaoperator. Die beiden ersten Gleichungen von (2.1) sind die Bewegungsgleichungen; die 3. Gleichung folgt aus der Kontinuitätsgleichung nach Integration über die vertikale Mächtigkeit der Atmosphäre; hierbei wurde vorausgesetzt, dass $\mathbf{v}$ unabhängig von der vertikalen Ordinate ist.

Die Gleichungen (2.1) sind unter Vorgabe bestimmter Anfangsbedingungen für u, v und ϕ , auf deren spezielle Form später eingegangen wird, zu lösen. Hierzu werden als Randbedingungen vorgeschrieben, dass durch die seitlichen Kanalbegrenzungen keine Masse fließen soll, d. h. dass dort die Normalkomponente der Geschwindigkeit verschwinden soll. Seien die Ränder durch $y = 0$ und $y = B$ gegeben, gilt also:

$$v = 0 \quad \text{für } y = 0 \text{ und } B. \quad (2.2)$$

Die Randbedingungen in x -Richtung sind zyklisch, d. h. die abhängigen Variablen besitzen mit ihren Ableitungen nach x am Anfang des Kanals $x = 0$ denselben Wert wie am Ende des Kanals $x = L$, also:

$$\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(0, y, t) = \frac{\partial^n u}{\partial x^n}(L, y, t), \quad (2.3)$$

$n \geq 0$, ganzzahlig. Entsprechendes gilt für v und ϕ .

Gedanklich entspricht dieses Modell also einem in sich geschlossenen Kanalring, wobei die Krümmung unberücksichtigt bleibt.

3. Differenzenquotienten

Um die Differentialgleichungen (2.1) allgemein lösen zu können, müssen numerische Methoden angewendet werden. In dieser Untersuchung wird die Näherungslösung mittels Differenzenverfahren erhalten, wobei drei verschiedene Verfahren benutzt und miteinander verglichen werden.

In den drei zu besprechenden Differenzenverfahren werden die Variablen längs der Zeitachse in den diskreten Niveaus $t = n \cdot \Delta t$ sowie $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$ definiert, wobei $n \geq 0$ ganzzahlig ist.

Zur Abkürzung wird:

$$\left. \begin{aligned} u(t = n \cdot \Delta t) &\equiv u^{(n)}, \\ u(t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t) &\equiv u^{(n+\frac{1}{2})} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

gesetzt.

Um den Wert einer Funktion für $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$ anzunähern, wird auch von einer Mittelung über die benachbarten Zeitniveaus Gebrauch gemacht und geschrieben:

$$(\bar{u}^t)^{(n+\frac{1}{2})} \equiv \frac{1}{2}(u^{(n)} + u^{(n+1)}). \quad (3.2)$$

Entsprechende Ausdrücke gelten für v und ϕ . Die auf den linken Seiten von (2.1) stehenden Ableitungen nach der Zeit werden entweder ersetzt durch die zentralen Differenzenquotienten:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{(n+\frac{1}{2})} &\approx \frac{1}{\Delta t} (u^{(n+1)} - u^{(n)}), \\ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{(n)} &\approx \frac{1}{\Delta t} (u^{(n+\frac{1}{2})} - u^{(n-\frac{1}{2})}) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

oder durch die ungenauere Vorwärtsdifferenz:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^{(n)} \approx \frac{2}{\Delta t} (u^{(n+\frac{1}{2})} - u^{(n)}). \quad (3.4)$$

Entsprechendes gilt für v und ϕ .

Innerhalb der x, y -Ebene ist das Gitternetz bei allen drei Verfahren dasselbe (siehe Abb. 1). Hierin sind durch unterschiedliche Markierung gekennzeichnet die Position der Veränderlichen

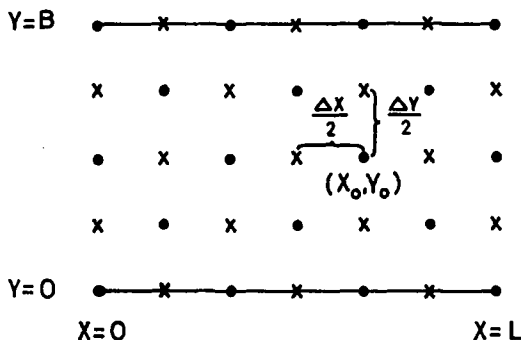


Abb. 1. Struktur des Gitternetzes in der x, y -Ebene. An den Punkten (●) sind die Felder zur Zeit $t = n \cdot \Delta t$, an den Kreuzen (×) zur Zeit $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$ vorgeschrieben, $n = 0, 1, 2, \dots$

sowohl zur Zeit $t = n \cdot \Delta t$ als auch zur Zeit $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$. In diesen beiden Zeitniveaus sind die Punkte gegeneinander versetzt. Hierdurch wird in vielen Fällen eine vorteilhafte Annäherung der Ortsableitungen durch Differenzen der Werte zweier benachbarter Punkte im Abstände Δx bzw. Δy ermöglicht. Z. B. kann man in Bezug auf den Punkt (x_0, y_0) (siehe Abbildung 1) schreiben:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{(n+\frac{1}{2})} \approx \frac{1}{\Delta x} \left[\phi^{(n+\frac{1}{2})} \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 \right) - \phi^{(n+\frac{1}{2})} \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0 \right) \right] \equiv \phi_x^{(n+\frac{1}{2})}. \quad (3.5)$$

Diese Approximation ist dort jedoch nicht möglich für

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^{(n)}, \quad \text{da } \phi^{(n)} \text{ im Punkte } \left(x_0 \pm \frac{\Delta x}{2}, y_0 \right)$$

nicht definiert ist. Werte von Funktionen, die an Gitterpunkten nicht direkt definiert sind, werden angenähert durch den Mittelwert der vier benachbarten Punkte. Z. B. ist $u^{(n+\frac{1}{2})}$ im Punkte (x_0, y_0) gegeben durch:

$$\bar{u}^{(n+\frac{1}{2})} \equiv (\bar{u}^{x,y})^{(n+\frac{1}{2})} \approx \frac{1}{2} [\bar{u}^x)^{(n+\frac{1}{2})} + (\bar{u}^y)^{(n+\frac{1}{2})}] \quad (3.6)$$

mit

$$\bar{u}^x \equiv \frac{1}{2} \left[u \left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}, y_0 \right) + u \left(x_0 - \frac{\Delta x}{2}, y_0 \right) \right],$$

$$\bar{u}^y \equiv \frac{1}{2} \left[u \left(x_0, y_0 + \frac{\Delta y}{2} \right) + u \left(x_0, y_0 - \frac{\Delta y}{2} \right) \right].$$

Dementsprechend wird die schon erwähnte Ableitung $(\partial\phi/\partial x)^{(n)}$ im Punkte (x_0, y_0) ersetzt durch

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^{(n)} \approx (\bar{\phi}_x)^{(n)}. \quad (3.7)$$

Man nimmt also statt der Differenz der Einzelwerte wie in (3.5) die Differenz von Mittelwerten gem. (3.6) im Abstand Δx bzw. Δy . Wendet man diese Regeln für die Variablen u, v, ϕ an, so besteht nach diesen Hinweisen keine Schwierigkeit, die Terme der rechten Seiten von (2.1) in geeignete Differenzenform innerhalb der x, y -Ebene zu übersetzen, wenn die jeweiligen Zeitniveaus angegeben sind.

Bei der Beschreibung der Differenzen-Verfahren wollen wir uns deshalb darauf beschränken, nur die zeitliche Abhängigkeit der Gleichungen aufzuzeigen. Die Differenzenform in x, y der rechten Seiten von (2.1) wird der Reihenfolge entsprechend symbolisch bezeichnet mit:

$$X^{(\cdot)}, Y^{(\cdot)}, Z^{(\cdot)}, \quad (3.8)$$

wobei noch das jeweilige Zeitniveau einzusetzen ist. Treten in diesen Ausdrücken verschiedene Zeitniveaus auf, so werden damit die Argumente der Operatoren von (3.8) gekennzeichnet.

4. Die Differenzengleichungen

Die drei zu beschreibenden Differenzenverfahren als Annäherung an (2.1) besitzen sämtlich denselben Fehlergrad 0 ($\Delta t^2, \Delta x^2, \Delta y^2$). Als *Verfahren I* soll das in der numerischen Wettervorhersage zumeist gebräuchliche "leap frog"-Verfahren angeführt werden. Vorausgesetzt sei die Kenntnis der Grössen

$$v^{(n)}, \phi^{(n)} \quad \text{und} \quad v^{(n-\frac{1}{2})}, \phi^{(n-\frac{1}{2})}.$$

Um die neuen Felder $v^{(n+1)}, \phi^{(n+1)}$ zu berechnen, benutzt das Verfahren I mit Rücksicht auf (3.7) folgende Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}^{(n)} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_I^{(n+\frac{1}{2})}, \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

Zur Berechnung der „Zwischenwerte“ zur Zeit

Tellus XX (1968), 2

$t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$ dient ein (4.1) analoges System, in dem das Zeitniveau um $\Delta t/2$ reduziert ist:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}^{(n+\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}^{(n-\frac{1}{2})} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_I^{(n)} \quad (4.2)$$

(4.2) soll ausser für $n=0$ ($t=0$) gelten. Zur Berechnung von $v^{(1)}$ und $\phi^{(1)}$ wurden in dieser Untersuchung die entsprechenden Gleichungen des Verfahrens II (4.3) herangezogen.

Die wesentlichen Grundzüge des *Verfahrens II* wurden unabhängig voneinander sowohl von Lax u. Wendroff, 1960, als auch von N. A. Phillips, 1960, aufgezeigt. Dieses Verfahren wird vielfach als Lax-Wendroff-Verfahren bezeichnet.

Es genügt vorauszusetzen, dass die Felder $v^{(n)}, \phi^{(n)}$ bekannt seien. Wie bei Verfahren I werden die neuen Felder zum Zeitpunkt $t = (n+1) \cdot \Delta t$ durch (4.1) bestimmt. Die „Zwischenwerte“ $v^{(n+\frac{1}{2})}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ werden jedoch anders berechnet, nämlich durch die Gleichungen:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix}^{(n+\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \\ \bar{\phi} \end{pmatrix}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}_{II}^{(n)}, \quad (4.3)$$

wobei die Mittelwerte $\bar{v}, \bar{\phi}$ durch (3.6) definiert sind. Im Gegensatz zu (4.2) wird die Zeitableitung in (4.3) durch eine Vorwärtsdifferenz (3.4) ersetzt.

Bei dem *Verfahren III* handelt es sich um ein u. a. von einem der Autoren (Fischer, 1965a; 1965b) vorgeschlagenes und erprobtes Differenzenschema. Hierbei wird vorausgesetzt, dass $v^{(n)}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ bekannt seien. Zu beachten ist das unterschiedliche Zeitniveau von v und ϕ , weshalb auch die neuen Felder $v^{(n+1)}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ heissen.

Da dieses Verfahren im Gegensatz zu den anderen beiden einen wesentlich anderen Rechnungsablauf besitzt, sei seine Darstellung in einer abweichenden Form gestattet. Zunächst ergibt sich $v^{(n+1)}$ aus:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(n+1)} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(n)} + \Delta t \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{III,1} (v^{(n+\frac{1}{2})}, (\bar{v}^t)^{(n+\frac{1}{2})}, \phi^{(n+\frac{1}{2})}), \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (4.4)$$

In den Argumenten der Ausdrücke $X_{III,1}$ und $Y_{III,1}$ ist $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ nach Voraussetzung bekannt. Festgelegt werden muss noch v zur Zeit $t = (n + \frac{1}{2}) \cdot \Delta t$. Das geschieht einmal durch Bildung eines zeitlichen Mittelwertes gemäss (3.2) für die in nicht differenzierter Form erscheinenden Geschwindigkeitskomponenten (z. B. im Coriolisglied). Dieses erfordert, da hierbei $v^{(n+\frac{1}{2})}$ auch auf der rechten Seite von (4.4) erscheint, die Auflösung eines einfachen algebraischen Gleichungssystems.

Zum anderen werden die Geschwindigkeitskomponenten — die Differenzenform von ∇u und ∇v in (2.1) — analog zu (4.3) approximiert durch:

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(n+\frac{1}{2})} = \begin{pmatrix} \bar{u} \\ \bar{v} \end{pmatrix}^{(n)} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{III,2} (v^{(n)}, \phi^{(n+\frac{1}{2})}). \quad (4.5)$$

Damit ist $v^{(n+\frac{1}{2})}$ berechenbar und, sobald das geschehen ist, auch $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ mittels

$$\phi^{(n+\frac{1}{2})} = \phi^{(n+\frac{1}{2})} + \Delta t \cdot Z_{III,1}(v^{(n+\frac{1}{2})}, \phi^{(n+\frac{1}{2})}). \quad (4.6)$$

Das noch unbekannte $\phi^{(n+1)}$ im Argument von $Z_{III,1}$ erscheint nur in dem nicht-linearen Term und wird bestimmt durch:

$$\phi^{(n+1)} = \bar{\phi}^{(n+\frac{1}{2})} + \frac{\Delta t}{2} Z_{III,2}(v^{(n+\frac{1}{2})}, \phi^{(n+\frac{1}{2})}). \quad (4.7)$$

An diesem Verfahren ist vorteilhaft, dass es auf die jeweils letzten Informationen zurückgreift, indem z. B. zur Berechnung von $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ die eben vorher bestimmten Felder $v^{(n+\frac{1}{2})}$ benutzt werden; das wirkt sich gegenüber den anderen Verfahren in einer Ersparnis an Speicherplätzen im Computer aus. Vernachlässigt man die nichtlinearen Glieder, so werden die Felder $v^{(n+\frac{1}{2})}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ nicht benötigt und (4.4) sowie (4.6) stellt ein in sich geschlossenes System dar.

Um das anfänglich benötigte $\phi^{(1)}$ aus den vorgegebenen Anfangsfeldern zu erhalten, wurde folgendes System gewählt:

$$\left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(1)} &= \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{III,3}^{(0)}, \\ \phi^{(1)} &= \phi^{(0)} + \frac{\Delta t}{2} \cdot Z_{III,3}(v^{(1)}, \phi^{(0)}) \end{aligned} \right\} \quad (4.8)$$

(Das Gitternetz der Abb. 1 fand hierbei keine Anwendung).

Natürlich ist es auch möglich, die bei den drei Verfahren benutzten Prinzipien zu mischen und damit weitere Verfahren zu gewinnen.

Zusätzlich zu (2.2) ist es erforderlich — um auch Werte an Gitterpunkten ausserhalb des Randes, die in den Differenzengleichungen auftreten, erfassen zu können — weitere Randbedingungen vorzuschreiben. Es schien vernünftig zu postulieren (siehe Definition (3.6)):

$$\bar{v}^x = \bar{v}^y, \quad \bar{\phi}^x = \bar{\phi}^y \quad \text{für } y = 0, B. \quad (4.9)$$

Diese durch keine physikalischen Gründe gerechtfertigten Bedingungen erlauben ein bequemes Schema für die Berechnung der Veränderungen u und ϕ längs der seitlichen Ränder. Die Geschwindigkeitskomponente v wurde dort nicht berechnet, sondern identisch Null gesetzt; auch die aus der zweiten Gleichung von (2.1) folgende geostrophische Beziehung am Rande fand keine Anwendung. Als Anfangsbedingung wurde $\phi^{(0)}$ vorgegeben und daraus die Geschwindigkeitskomponenten $u^{(0)}$ und $v^{(0)}$ aus der geostrophischen Gleichgewichtsbeziehung:

$$\left. \begin{aligned} u^{(0)} &= -\frac{1}{f} \phi_y^{(0)}, \\ v^{(0)} &= \frac{1}{f} \phi_x^{(0)} \end{aligned} \right\} \quad (4.10)$$

bestimmt.

5. Einige Integraleigenschaften der hydrodynamischen Gleichungen

Für Vergleiche der mit den verschiedenen Verfahren gewonnenen numerischen Lösungen untereinander und in gewissem Masse auch mit exakten Lösungen der Differentialgleichungen, eignen sich besonders gut die Integraleigenschaften der hydrodynamischen Gleichungen; diese geben in kurzer Form die wesentlichen Züge über das physikalische und numerische Verhalten der Lösungen wieder.

Als zonales Mittel einer Feldgrösse $a(x, y)$ soll definiert werden:

$$\bar{a} = \frac{1}{L} \int_0^L a dx, \quad (5.1)$$

während das Mittel in Querrichtung des Kanals

(das meridionale Mittel) geschrieben werden soll:

$$\tilde{a} = \frac{1}{B} \int_0^B a dy. \quad (5.2)$$

Ferner gilt:

$$a = \bar{a} + a', \quad (5.3)$$

wobei a' die Abweichung vom zonalen Mittelwert ist. Mit:

$$K_Z = \frac{1}{2} [\bar{u}^2 + \bar{v}^2] + \bar{u}u' + \bar{v}v' \quad (5.4)$$

wird die „zonale kinetische Energie“ und mit:

$$K_E = \frac{(u')^2 + (v')^2}{2} \quad (5.5)$$

die „kinetische Energie der Störungen“ definiert. Die kinetische Energie selbst ist gegeben durch:

$$K = \frac{(u^2 + v^2)}{2} = K_Z + K_E. \quad (5.6)$$

Im Hinblick auf das vorliegende divergente barotrope Modell ist noch folgende Energiegrösse wichtig:

$$E^* = \frac{g\bar{h} + \phi}{g\bar{h}} \cdot K + \frac{\phi^2}{2g\bar{h}}, \quad (5.7)$$

E^* ist der totalen Energie bis auf eine Konstante proportional. Mit Hilfe der Randbedingungen gewinnt man aus dem System (2.1) folgende Integralbeziehungen für K_Z und K_E :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{K}_Z &= \widetilde{\phi D} + \widetilde{K_Z D} - \langle K_Z K_E \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{K}_E &= \widetilde{\phi' D'} + \widetilde{K_E D} + \langle K_Z K_E \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Hierbei ist $D = \partial u / \partial x + \partial v / \partial y$ die Horizontaldivergenz des Windes.

$$\langle K_Z \cdot K_E \rangle = -\overline{v'v'} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} - \overline{u'v'} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} \quad (5.9)$$

repräsentiert die Energieumwandlung von mittlerer zentraler kinetischer Energie in mittlere kinetische Energie der Störungen (siehe N. A. Phillips, 1956) und kennzeichnet somit barotrope Stabilität oder Instabilität.

Tellus XX (1968), 2

Aus (5.8) und (5.6) folgt weiter:

$$\frac{\partial \tilde{K}}{\partial t} = \widetilde{K D} + \widetilde{\phi D}. \quad (5.10)$$

$\widetilde{\phi D}$ ist verantwortlich für die Energieumwandlung von potentieller in kinetische Energie; diese Grösse spielt eine wichtige Rolle in der baroklinen Atmosphäre (siehe White u. Saltzman, 1956), ist im vorliegenden Modell jedoch von untergeordneter Bedeutung.

Im Falle einer divergenzfreien Atmosphäre wäre die mittlere kinetische Energie $\tilde{K}$ eine konservative Grösse — es findet kein Übergang von potentieller in kinetische Energie statt — und $\tilde{K}_E$ könnte sich nur auf Kosten von $\tilde{K}_Z$ ändern. In unserem divergenten Modell ist jedoch $\tilde{E}^*$ die konservative Energiegrösse, denn es gilt wegen

$$\begin{aligned} \frac{\partial E^*}{\partial t} &= -\frac{1}{g\bar{h}} \nabla \cdot \{ \mathbf{v}(K + \phi)(g\bar{h} + \phi) \} \\ \frac{\partial \tilde{E}^*}{\partial t} &= 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

Diese konservative Eigenschaft von $\tilde{E}^*$ braucht nicht streng für die Lösungen der numerischen Verfahren erhalten zu bleiben. Vom physikalischen Standpunkt her kann die numerische Lösung jedoch nur so lange als sinnvoll gelten, wie $\tilde{E}^*$ als Funktion der Zeit sich unter möglichst kleinen Fluktuationen um einen Mittelwert herum bewegt. Ein sich verstärkendes Anwachsen dieser Grösse mit der Zeit ist ein untrügliches Zeichen für numerische Instabilität; die numerische Lösung wird dann unbrauchbar.

Um die Energieübergänge möglichst eingehend darstellen zu können, wurde die kinetische Energie der Störungen mittels der harmonischen Analyse in ihre spektralen Anteile K_{Em} zerlegt (E. Eliassen, 1958), wobei $m = 1, 2, 3, \dots, M$ die relative Wellenzahl bedeutet. Es gilt:

$$\tilde{K} = \tilde{K}_Z + \tilde{K}_E = \tilde{K}_Z + \sum_{m=1}^M \tilde{K}_{Em}.$$

Durch Betrachtung der Energietransporte zwischen den einzelnen Wellenkomponenten gewinnt man einen weiteren Einblick in die Struktur der Lösungen.

6. Anfangsfelder und Anfangstendenzen

Wie bereits erwähnt, wird in den Rechnungen nur das Geopotential $\phi^{(0)}$ anfänglich vorgegeben, welches die absolute Topographie der 500 mb-Fläche in der Atmosphäre repräsentieren soll. Die Windkomponenten werden daraus mittels der geostrophischen Beziehung (4.10) bestimmt. Unter den zahlreichen Funktionen $\phi(x, y)$, vorzugeben durch einfache analytische Ausdrücke, die eine Ähnlichkeit mit der wellenförmigen Struktur der troposphärischen Stromfelder aufweisen, wurden hier folgende ausgewählt:

$$\begin{aligned} \phi_{,7}^{(0)} = & -B \left[\bar{U}_1 \left(\frac{y}{B} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2\pi} \sin \alpha y \right) \right. \\ & + \bar{U}_2 \left(\frac{y}{B} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4\pi} \sin 2\alpha y \right) \Big] \\ & + \sum_{m=1}^M \frac{v_m}{2m\mu} (1 - \cos \alpha y) \sin m\mu x \quad (6.1) \end{aligned}$$

mit $\alpha = \frac{2\pi}{B}$, $0 \leq x \leq L$, $0 \leq y \leq B$.

$$\mu = \frac{2\pi}{L}.$$

$\bar{U}_1$ und $\bar{U}_2$ sind konstante Grössen, die mit der mittleren zonalen Geschwindigkeit mittels $\bar{u} = \bar{U}_1 + \bar{U}_2$ zusammenhängen; v_m bedeutet die maximale „meridionale“ Komponente der Geschwindigkeit für die einzelnen Teilwellen. Der Ausdruck (6.1) erlaubt es, eine ganze Reihe von Stromfeldern aufzubauen, deren meridionale Geschwindigkeitsprofile die Bedingung für barotrope Instabilität gemäss Kuo, 1949, erfüllen.

7. Vergleichende Betrachtung der Ergebnisse

Aus der grossen Anzahl von Testuntersuchungen, die mit den im Abschnitt 4 beschriebenen Rechenverfahren ausgeführt wurden, soll im folgenden ein charakteristisches Beispiel angeführt werden. Hierzu wurden die nachstehend aufgeführten Werte für die Parameter des Gleichungssystems (2.1) sowie des Anfangsfeldes (6.1) benutzt:

$$\begin{aligned} B &= 3000 \text{ km} \\ f &= 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \\ gh &= 10^4 \text{ m}^2 \text{sec}^{-2} \end{aligned}$$

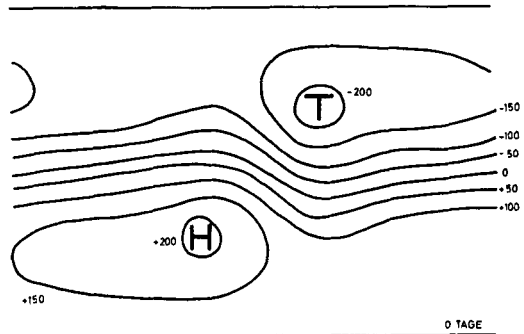


Abb. 2. Das Anfangsfeld für ϕ (geodyn. Meter) gemäss Gl. (6.1).

$$\begin{aligned} L &= 6000 \text{ km} \\ M &= 3 \\ \bar{U}_1 &= 15 \text{ m sec}^{-1} \\ \bar{U}_2 &= -7,5 \text{ m sec}^{-1} \\ v_1 &= -v_2 = v_3 = 5,2 \text{ m sec}^{-1} \\ \beta &= 1,5 \cdot 10^{-11} \text{ m}^{-1} \text{ sec}^{-1} \end{aligned}$$

Der Abstand der Gitterpunkte in x - und y -Richtung ist gleich; die Werte $\Delta x = \Delta y = \Delta s = 200 \text{ km}$, 300 km und 600 km wurden verwendet. Für den Zeitschritt Δt galt bei allen Verfahren:

$\Delta t = \Delta s / 2\sqrt{gh}$. Diese Beziehung ist willkürlich, erfüllt jedoch die Courant-Friedrich-Levy Bedingung für numerische Stabilität: $\Delta t \leq \Delta s / \sqrt{2c}$, wobei c die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der am schnellsten laufenden Welle im System ist (näherungsweise gilt $c \approx \sqrt{gh}$). Diese Bedingung ist eine notwendige Bedingung für die Stabilität aller drei Rechenverfahren.

Das aus den angegebenen Daten resultierende Anfangsfeld für das Geopotential ϕ ist aus drei Wellen mit den Wellenlängen L , $L/2$, $L/3$ zusammengesetzt, deren Amplituden im Verhältnis 1:2:3 zueinander stehen. Das meridionale Profil des zonal gemittelten Windes beschreibt einen scharfen, um die Mitte des Kanals symmetrischen jet-stream von maximal 30 m/sec Geschwindigkeit. Das Anfangsfeld $\phi^{(0)}$ ist in der Abbildung 2 aufgetragen; ausgezogen sind die Linien $\phi^{(0)} = \text{const.}$

Die weitere Entwicklung der einzelnen Felder interessiert an dieser Stelle jedoch nicht; der Vergleich der Lösungen soll vielmehr mit Hilfe der in Abschnitt 5 beschriebenen Energieintegrale erfolgen. In Abbildung 3 sind die aus den drei Feldern u , v , ϕ errechneten Energiegrössen $\tilde{E}^*$, $\tilde{K}$, $\tilde{K}_z \tilde{K}_E$, sowie die spektralen

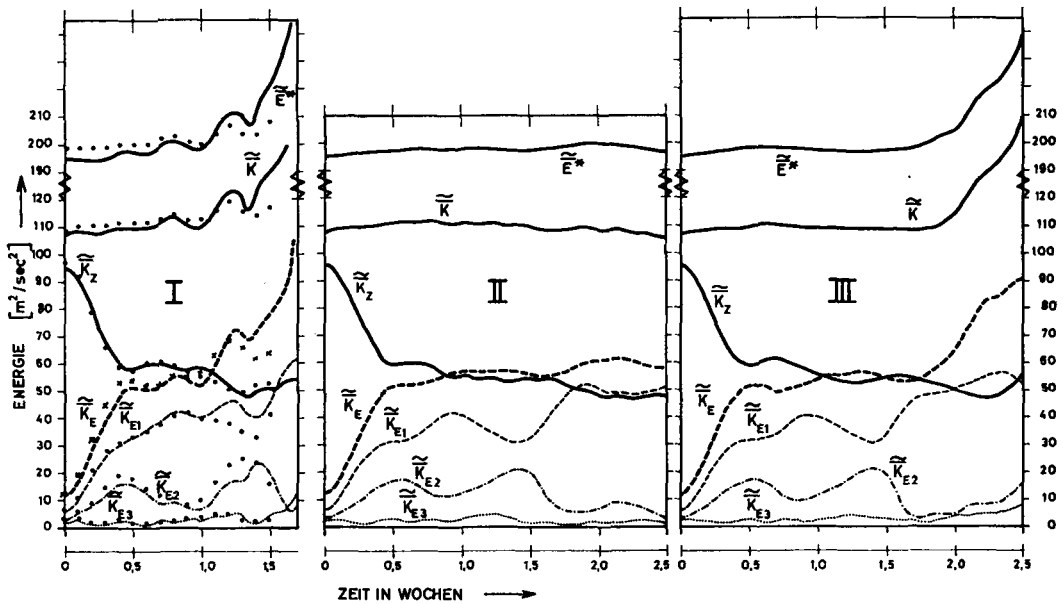


Abb. 3. Der zeitliche Verlauf einiger Energieintegrale errechnet aus den Lösungen der Differenzenverfahren I, II und III. Die Gitterkonstante betrug $\Delta x = \Delta y = 300$ km (siehe Abb. 1). Die Punkte und Kreuze in I beziehen sich auf $\Delta s = 200$ km.

Energien $\tilde{K}_{E1}$, $\tilde{K}_{E2}$, $\tilde{K}_{E3}$ als Funktionen der Zeit aufgetragen (anfänglich ist $\tilde{K}_E = \tilde{K}_{E1} + \tilde{K}_{E2} + \tilde{K}_{E3}$), und zwar für alle 3 Verfahren: I, II, III. Den Kurven liegen die Rechnungen mit der Gitterkonstanten $\Delta s = 300$ km zu Grunde; die Ausgabe der Ergebnisse erfolgte alle 20 Zeitschritte ($\Delta t = 1,5144 \cdot 10^3$ sec).

Im Verfahren I sind durch Punkte und Kreuze die Ergebnisse markiert, die mit $\Delta s = 200$ km, ($\Delta t = 1,0096 \cdot 10^3$ sec) erhalten wurden. Dieses engmaschigere Gitternetz wurde deshalb zusätzlich gewählt, um die Genauigkeit der Ergebnisse abschätzen zu können. Die Lösung der Differentialgleichungen (2.1) wird nämlich, wie die Theorie zeigt, durch die Differenzenverfahren umso besser angenähert, je kleiner Δt und Δs bei festgehaltenem $\Delta t/\Delta s$ wird; das gilt, so lange rechnerische Stabilität herrscht. (Anm.: die Theorie gilt streng genommen nur für die linearisierte Version der hydrodynamischen Gleichungen und für ein entsprechendes stabiles Verfahren.)

Eine interessante Frage ist: wie lange bleiben die einzelnen Verfahren stabil? Eine rechnerische Instabilität macht sich u. a. in einem sich rasch verstärkenden Ansteigen der mittleren totalen Energie $\tilde{E}^*$, die im Differential-

system eine konservative Grösse darstellt, bemerkbar; dieses Ansteigen entbehrt also jeder physikalischen Grundlage und ist ein reiner Effekt des jeweiligen Differenzenschemas. Es ist klar, dass mit Beginn eines instabilen Verhal-

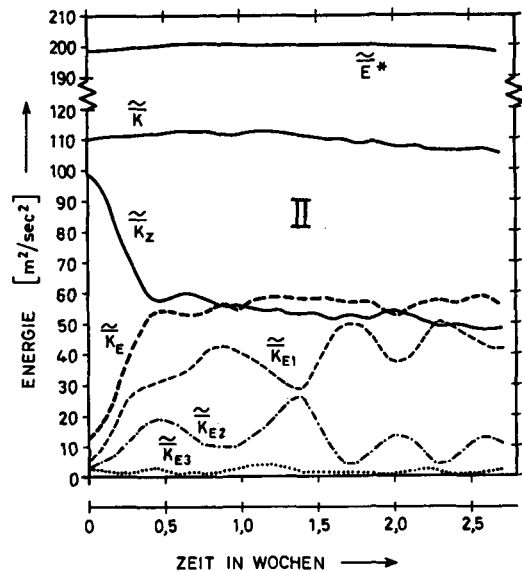


Abb. 4. Wie Abb. 3, ausser dass $\Delta s = 200$ km.

tens die Lösungen unbrauchbar werden; sie wachsen schnell zu solchen Grössen an, dass sie von einer Rechenmaschine nicht mehr verarbeitet werden können.

Betrachtet man zunächst die vorliegenden Ergebnisse in dieser Hinsicht, so erkennt man für $\Delta s = 300$ km den Beginn einer rechnerischen Instabilität beim Verfahren I nach ca. einer Woche ($400 \Delta t$) und beim Verfahren III nach ca. zwei Wochen; dahingegen zeigte Verfahren II keinerlei Zeichen einer Instabilität während der durchlaufenen Integrationszeit (2,5 Wochen). Ausser bei der totalen Energie ist die Instabilität auch bei der mittleren kinetischen Energie $\tilde{K}$ zu erkennen, und zwar ausschliesslich als Folge eines Ansteigens der Störungsenergie $\tilde{K}_E$. (Die Rechnung brach ab für I beim Zeitschritt $n = 690$, bei III bei $n = 1150$.)

Bis zum angegebenen Beginn der numerischen Instabilität unterscheiden sich die Ergebnisse der 3 Verfahren kaum, d. h. sie sind einander bis zum Zeitraum einer Woche gleichwertig; fast identische Resultate zeigen die Verfahren II und III bis zum Zeitraum von 2 Wochen. Die Untersuchung der jeweiligen Stromfelder bestätigte diese Aussage: die Karten $\phi^{(n)}$ = const zeigten nur geringfügige Unterschiede gegeneinander.

Die mit I durchgeführte Rechnung mit $\Delta s = 200$ km, deren Ergebnisse in Abbildung 3 durch Punkte und Kreuze eingezeichnet sind, zeigte ein relativ stabiles Verhalten bis zum Abschluss der Rechnung bei 1,5 Wochen. Die Ergebnisse unterscheiden sich innerhalb der ersten Woche nur wenig von denjenigen mit $\Delta s = 300$ km, so dass man hieraus den Schluss ziehen kann, dass in diesem Zeitraum die Lösungen der Differentialgleichungen durch alle Verfahren mit dem Gitternetz $\Delta s = 300$ km gut angenähert werden. Im Bereich der Instabilität von I (> 1 Woche) gibt das engmaschigere Gitternetz Resultate, die mit denen der Verfahren II und III noch gut übereinstimmen, wenn auch Amplitude und Phase im Verlauf von $\tilde{K}_{E1}$ z. B. erkennbare Unterschiede aufweisen. Dem anfänglichen Abfall von $\tilde{K}_Z$ und dem gleichzeitigen Anstieg von $\tilde{K}_E$ kommt also physikalische Realität zu. Die Trends stehen in enger Verbindung mit der schon erwähnten barotropen Instabilität. An dem Anwachsen von $\tilde{K}_E$ ist hauptsächlich die Wellenzahl 1 beteiligt, während der Beitrag von

$\tilde{K}_{E3}$ verschwindend gering bleibt. Sämtliche neu entstandenen Oberwellen $m > 3$ gewinnen keine Bedeutung, solange die Rechnungen stabil bleiben; ihre Energie erreicht insgesamt kaum die Grösse von $\tilde{K}_{E3}$. Im weiteren Verlauf der Rechnung findet im wesentlichen ein periodischer Energieaustausch zwischen der Wellenzahl 1 und 2 statt. Energieübergänge von potentieller in kinetische Energie besaßen in unserem Modell praktisch keine Bedeutung, was an dem nahezu parallelen Verlauf von $\tilde{K}$ und $\tilde{E}^*$ zu erkennen ist.

Insbesondere um die Stabilität des Verfahrens II weiter zu testen, wurden aus Zeitersparnis die Rechnungen mit der Gitterkonstanten $\Delta s = 600$ km ($\Delta t = 3,0288 \cdot 10^3$ sec) wiederholt. Wenn auch dadurch die Ergebnisse absolut gesehen weniger genau werden — sie zeigten auch dementsprechend grössere Abweichungen gegenüber den mit $\Delta s = 300$ km gewonnenen —, so sind sie doch für Vergleichszwecke gut zu gebrauchen. Gegenüber vorher änderten sich die Stabilitätseigenschaften der einzelnen Verfahren kaum: Verfahren I zeigt nach einer Woche, Verfahren III zwischen zwei und drei Wochen Anzeichen von rechnerischer Instabilität; die Rechnung war stabil für I bis $n = 370$, für III bis $n = 890$ ($200 \Delta t = 1$ Woche). Das Verfahren II hingegen war noch bei $n = 3680$ (18,4 Wochen) stabil. Um so erstaunlicher war daher die Tatsache, dass mit der Gitterkonstanten $\Delta s = 200$ km das Verfahren III eher instabil wurde (bei $t = 1,4$ Wochen) als mit $\Delta s = 300$ km und $\Delta s = 600$ km. Für dieses Gitternetz zeigte hingegen Verfahren I ein etwas stabileres Verhalten wie aus Abbildung 3 zu ersehen ist. Die entsprechenden Rechnungen mit Verfahren II zeigten bis $t = 2,7$ Wochen keinerlei Anzeichen von rechnerischer Instabilität. Bis zum Beginn der Instabilitäten ergaben auch in diesem Beispiel alle Verfahren praktisch gleiche Resultate — in Bezug auf II und III sogar praktisch identische Resultate —. Die Lösung für das Verfahren II mit $\Delta s = 200$ km ist in der Abbildung 3 aufgetragen.

Zweifellos ist nach dieser Betrachtung das Verfahren II als das günstigste zu bezeichnen; es ist besonders stabil und zeitigt dieselben Ergebnisse wie die anderen Verfahren, solange sie rechnerisch stabil sind. Wenn auch das Verfahren II Integrationen über längere Perioden zulässt, so macht sich doch mit der Zeit

eine Dämpfung der relativ kurzen Wellen bemerkbar, die ein Absinken von $\bar{K}$ und $\bar{E}^*$ bewirkt. Diese Eigenschaft des Verfahrens II, eine Dissipation der in den kurzen Wellen enthaltenen Energie hervorzurufen, die sonst nur durch Reibungsglieder erzwungen wird, ist die eigentliche Ursache der grossen rechnerischen Stabilität (Fischer, 1965a).

Das Verfahren II wurde kürzlich von Houghton, Kasahara u. Washington (1966) eingehend anhand eines ähnlichen barotropen Modells studiert, wobei versucht wurde, durch unterschiedliche Formulierung des Coriolisgliedes und der Randbedingungen im numerischen System, sowie durch Hinzufügen stabilitätsfördernder Reibungsterme das Verfahren zum Zwecke einer Langzeitintegration optimal zu gestalten. Diese Variationen ein und desselben Verfahrens führten nach ca. 50 Tagen zu merkbareren Unterschieden in den Resultaten. Derselbe Effekt wurde erzeugt durch eine geringfügige Änderung des Anfangszustandes. Das von den obigen Autoren benutzte Modell ist praktisch mit dem unseren identisch, jedoch wurden die Variablen u , v , ϕ zu jeder Zeit an denselben Gitterpunkten vorgeschrieben; dadurch sind die Differenzenannäherungen in x und y anders als in unserem versetzten Gitternetz. Verschieden sind auch die Anfangsfelder sowie die Methode der Annäherung von u und v durch das vorgeschriebene Druckfeld zur Zeit $t = 0$. Wenn auch dadurch ein Vergleich der hier gefundenen Ergebnisse mit denen von Houghton, Kasahara und Washington in Bezug auf das Verfahren II schwierig ist, so haben die Autoren doch den Eindruck gewonnen, dass das in dieser Untersuchung verwendete versetzte Gitternetz sowie die dadurch sich anbietende Formulierung der Differenzenquotienten bei demselben Aufwand an Gitterpunkten in sich logischer, einfacher und in den Ergebnissen genauer ist.

Aus den angeführten Beispielen ist zu erkennen, dass die ohne Schwierigkeiten zu handhabende Anwendung der geostrophischen Beziehung (4.10) zur Errechnung von $u^{(0)}$ und $v^{(0)}$ aus dem Druckfeld in sämtlichen Verfahren keine Lärmwellen von Bedeutung in den betrachteten Feldern aufkommen lässt, die sich störend bemerkbar machen könnten.

Zwar wird bei einer gründlichen „Balancierung“ des Anfangszustandes der Beginn der rechnerischen Instabilität bei Verfahren I

und III hinausgezögert werden, jedoch scheint von gleicher Bedeutung eine exaktere Einführung der Randbedingungen zu sein (siehe Shuman u. Vanderman, 1966). Zudem dürfte eine numerische Wettervorhersage mit den barotropen Modellen nur für wenige Tage praktikabel sein wegen des dann wachsenden Einflusses barokliner Effekte. Eine derartige kurzfristige Vorhersage ist mit jedem der hier untersuchten Verfahren bei geostrophischer Anfangsannäherung möglich. So könnte der einzige Nachteil der geostrophischen Anfangsannäherung darin bestehen, dass sie zu ungenau ist und damit zu einer fehlerhaften Vorhersage führt. Aber auch hier könnte man einwenden, dass in der Praxis die anfangs einzugebende Wettersituation nicht genau bekannt ist und dass dadurch schon Fehler entstehen.

Die Anwendbarkeit der beschriebenen Rechenverfahren ist prinzipiell natürlich nicht auf barotrope Modelle beschränkt; von baroklinen Modellen lassen sich auch sinnvolle, realistische Entwicklungen simulierende Integrationen über längere Zeit hinweg erwarten. Hierzu sind möglichst stabile Rechenverfahren unerlässlich. Allgemein besteht die Möglichkeit, die Rechenstabilität durch Ausgleichung oder durch Reibungsterme zu erhöhen. In der baroklinen Atmosphäre muss notwendigerweise Reibung vorhanden sein, um im Mittel einen Ausgleich gegen die Produktion kinetischer Energie aus potentieller Energie zu erwirken. Somit kann das in unseren Untersuchungen behandelte relativ instabile System I bei Anwendung auf die barokline Atmosphäre hinreichend stabilisiert werden — bei hinreichend grossen Reibungsansätzen —, um damit eine Integration über beliebig lange Zeit zu ermöglichen. Das beste Beispiel hierfür bietet die kürzlich von Smagorinsky und Mitarbeitern (1965) durchgeführte numerische Simulation der allgemeinen Zirkulation der Atmosphäre. Da die Reibung in der Atmosphäre nur grössenordnungsmässig bekannt ist, besteht genügend Spielraum, sie so in das Rechenverfahren einzufügen, dass es stabil bleibt. Es wäre jedoch befriedigender, ein so grundsätzlich stabiles Verfahren wie II zu verwenden.

Die Güte eines Verfahrens sollte jedoch nicht nur vom Gesichtspunkt einer möglichst langen rechnerischen Stabilität her betrachtet werden — die lässt sich, wie eben ausgeführt wurde, z. T. manipulieren —, sondern auch von Zweck-

mässigkeitsgründen, was die Rechengeschwindigkeit und den Verbrauch an Speicherplätzen im Computer anbelangt. Im folgenden Abschnitt wird versucht, die Rechenverfahren I, II, III in dieser Richtung zu untersuchen.

8. Vergleich der Rechenverfahren

Zur Programmierung der drei Verfahren ist folgendes zu bemerken: Bei der Erstellung der Programme ergeben sich für einen geübten Programmierer keine ausserordentlichen Schwierigkeiten. Komplizierter kann dieses Vorhaben eigentlich nur dann werden, wenn die Kapazität, die Rechengeschwindigkeit oder die allgemeine technische Konzeption einer Rechenanlage zu programmtechnischen Kunstgriffen nötigen, die eine vertretbare Rechenzeit überhaupt erst möglich machen. Häufig muss man dann allerdings das „schnellere“ Programm mit einem Mehr an besetzten Arbeitsspeichern bezahlen, wie z. B. beim Telefunken-Rechner TR4 bei Verwendung der „linearen Adressen-Fortschaltung“.

Die Programme für die drei skizzierten Verfahren wurden sämtlich in ALGOL 60 geschrieben.

Für die Verfahren I und II werden zur Berechnung der Grössen $v^{(n+1)}$ und $\phi^{(n+1)}$ 6 „Felder“ benötigt, nämlich $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $\phi^{(n)}$, $u^{(n+\frac{1}{2})}$, $v^{(n+\frac{1}{2})}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$. Ein „Feld“ besteht hierbei aus $j \cdot (k+1)/2$ Punkten, wobei $j = 2L/\Delta s$ und $k = 2B/\Delta s$ sind. Punkte am Ende des Kanals sind wegen $u(L, y) = u(0, y)$ (desgleichen für v und ϕ) nicht mitgezählt, ebenso wenig die Punkte, die ausserhalb des Kanals für die Rechnung benötigt werden.

Das Verfahren III dagegen benötigt nur 5 Felder. Denn nach erfolgter Berechnung von

$u^{(n+1)}$ und $v^{(n+1)}$ aus $u^{(n)}$, $v^{(n)}$, $u^{(n+\frac{1}{2})}$, $v^{(n+\frac{1}{2})}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ kann $\phi^{(n+1)}$, das anschliessend berechnet wird, auf eines der Felder $u^{(n+\frac{1}{2})}$ oder $v^{(n+\frac{1}{2})}$ geschrieben werden, da diese zur Weiterrechnung nicht mehr benötigt werden.

Was die Rechengeschwindigkeit und den Speicherplatzbedarf der einzelnen Programme betrifft, kann man folgendes aussagen: Verfahren I und II benötigen zur Berechnung eines vollen Zeitschritts nahezu die gleiche Zeit. Denn die Gleichungen zur Berechnung der Grössen u , v und ϕ zum Zeitpunkt $t = (n+1) \cdot \Delta t$ sind in beiden Verfahren identisch, während die Gleichungen zur Berechnung der Grössen $u^{(n+\frac{1}{2})}$, $v^{(n+\frac{1}{2})}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ zwar verschieden sind, sonst aber eine gleiche Anzahl von Mittelbildungen und sonstigen Rechenoperationen aufweisen. Die Gleichungen zur Berechnung der Grössen zum Zeitpunkt $t = \frac{1}{2} \cdot \Delta t$ sind wieder identisch.

Die Berechnung der Grössen $u^{(\frac{1}{2})}$, $v^{(\frac{1}{2})}$ und $\phi^{(\frac{1}{2})}$ erfordert bei Verfahren III den gleichen Rechenaufwand wie bei den anderen beiden Verfahren. Auch die Gleichungen zur Berechnung von $u^{(n+\frac{1}{2})}$ und $v^{(n+\frac{1}{2})}$ erfordern keinen grösseren Rechenaufwand als bei I und II, während die zur Berechnung von $u^{(n+1)}$ und $v^{(n+1)}$ weniger als bei I und II erfordern. Doch wird dieser „Gewinn“ durch das anschliessende Lösen zweier algebraischer Gleichungen wieder aufgehoben. Demgegenüber ist die Berechnung von $\phi^{(n+1)}$ und $\phi^{(n+\frac{1}{2})}$ mit weniger Rechenoperationen verbunden als bei I und II.

Insgesamt kann man sagen, dass das Verfahren III sowohl in Bezug auf die Rechengeschwindigkeit als auch in Bezug auf den Speicherplatzbedarf am günstigsten ist.

Der Speicherplatzbedarf der einzelnen reinen Programme (als Prozedur gesehen) ist nahezu gleich gross.

REFERENCES

- Eliassen, E. 1958. A study of the long atmospheric waves on the basis of zonal harmonic analysis. *Tellus* 10, 206–215.
- Fischer, G. 1965a. A survey of finite-difference approximations to the primitive equations. *Monthly Weather Rev.* 93, 1–10.
- Fischer, G. 1965b. On a finite difference scheme for solving the non-linear primitive equations for a barotropic fluid with application to the boundary current problem. *Tellus* 17, 4, 505–12.
- Houghton, D., Kasahara, A., u. Washington, W. 1966. Long-term integration of the barotropic equations by the Lax-Wendroff method. *Monthly Weather Rev.* 94, 141–50.
- Kuo, H. L. 1949. Dynamic instability of two-dimensional non-divergent flow in a barotropic atmosphere. *Journal of Meteorol.* 6, 105–22.
- Lax, P. D. u. Wendroff, B. 1960. Systems of conservation laws. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13, 217–37.
- Phillips, N. A. 1956. The general circulation of the atmosphere: A numerical experiment. *Quarterly Journal of the Royal Meteor. Soc.* 82, 123–64.

- Phillips, N. A. 1960. Numerical integration of the hydrostatic system of equations with a modified version of the Eliassen finite-difference grid. *Proceedings of the International Symposium on Numerical Weather Prediction in Tokyo*. The Meteorological Society of Japan, March 1962, pp. 109–20.
- Shuman, F. G. u. Vanderman, L. W. 1966. Difference system and boundary conditions for the primitive-equation barotropic forecast. *Monthly Weather Rev.* 94, 329–35.
- Smagorinsky, J., Manabe, S. u. Holloway, J. L. 1965. Numerical results from a nine-level general circulation model. *Monthly Weather Rev.* 93, 12, 727–68.
- White, R. M. u. Saltzman, B. 1956. On conversions between potential and kinetic energy in the atmosphere. *Tellus* 8, 357–63.

СРАВНЕНИЕ ТРЕХ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ «ПРИМИТИВНЫХ УРАВНЕНИЙ» БАРОТРОПНОЙ ДИВЕРГЕНТНОЙ МОДЕЛИ АТМОСФЕРЫ

Проводится интегрирование гидростатической системы уравнений дивергентной баротропной модели атмосферы, заключенной между широтными стенками, с помощью трех конечноразностных схем второго порядка точности. Схема 1 является схемой с центральными разностями и обычно используется в численном предсказании. Схема 2 основана на методе, предложенном Лаксом и Вендрофом и Н. А. Филлипсом. Схема 3 разбиралась одним из авторов. Применяя для всех схем одну и ту же сетку точек по пространству и по времени и не включая в схему сглаживание или трение, можно объективно сравнить поведение разностных уравнений. В качестве начального поля бралась геострофически сбалансированная струя, соответствующая трем зональным волновым числам; поток является баротропно неустойчивым.

Сравниваются интегралы: а) кинетической

энергии вихрей, включая их спектральные части, б) зональной кинетической энергии, в) кинетической энергии и г) общей энергии. Последняя является консервативной характеристикой дифференциальной системы. Эти интегралы являются хорошим средством для исследования баротропной неустойчивости. Эта проблема будет рассмотрена в дополнительной статье. Все три метода дают практически одинаковые результаты в течение первой недели прогностического времени; затем схема 1 начинает обнаруживать численную неустойчивость, которая в схеме 3 появляется на неделю позднее. Схема 2, по-видимому, полностью устойчива, однако, обнаруживает, как можно было ожидать, слабую тенденцию к подавлению относительно коротких волн. В схеме 3 нужно иметь в машинной памяти на одно поле меньше, чем в схемах 1 и 2.