

La corrélation d'espace du géopotentiel du niveau moyen énergétique dans l'atmosphère

Par ST. PANTCHEV, *Université de Sofia, Bulgarie*

(Manuscript received July 22, 1964)

ABSTRACT

The statistical structure of the fluctuations of local changes in geopotential is studied using the equation $gz = RT$ valid at the level of the so-called mean energy level of the atmosphere, which is also the level of geostrophic advection. It is shown that the two-dimensional *random* scalar field $\dot{H}(x, y)$ is anisotropic horizontally, that is to say, the correlation moment $B_{\dot{H}\dot{H}}$ of two points depends not only upon the distance r between them, but also upon the orientation of the straight line joining the two points in the horizontal plane. The explicit form of this dependence is given.

In order to evaluate the contribution of the non-linear term, one must introduce the advection equation and the assumption of quasi-normality, generally accepted in turbulence theory.

Finally, the particular case of a gaussian correlation function for the geopotential $B_{\dot{H}\dot{H}}(r)$ is envisaged.

Résumé

L'auteur étudie la structure statistique se rapportant aux fluctuations des changements locaux du géopotentiel $\dot{H} = \partial H / \partial t$ sur la base de l'équation $gz = RT$ valable au niveau appelé niveau moyen énergétique de l'atmosphère, lequel est aussi celui de l'advection géostrophique. On montre que le champ scalaire $\dot{H}(x, y)$ aléatoire bidimensionnel est anisotrope sur la surface plane, c'est-à-dire que le moment corrélatif $B_{\dot{H}\dot{H}}$ de deux points dépend non seulement de la distance r entre les points, mais aussi de l'orientation de la droite qui les unit sur la surface plane. La forme explicite de cette dépendance est donnée.

Pour calculer la contribution du terme non linéaire, on introduit, dans l'équation de l'advection, l'hypothèse de la quasi-normalité généralement utilisée dans la théorie de la turbulence.

Finalement l'auteur examine un cas particulier où la fonction corrélatrice du géopotentiel $B_{\dot{H}\dot{H}}(r)$ est du type gaussien.

1. Introduction

On sait (BORISSENKOV, 1960) qu'il existe dans l'atmosphère un niveau relativement stable, à une hauteur d'environ 7 km (surface isobare

compréhensible entre 410–420 mb), appelé niveau moyen énergétique, lequel possède les propriétés essentielles suivantes:

a) le rapport de l'énergie interne à l'énergie potentielle pour une colonne verticale unitaire est le même que le rapport pour l'atmosphère entière, c'est-à-dire $I/\Pi = 2,5$;

b) à ce niveau, la fonction $\psi(z) = zp(z)$, où $p(z)$ représente la pression atmosphérique, atteint son maximum. De la condition $d\psi = 0$ et des équations $dp = -\rho g dz$ et $p = \rho RT$ nous deduisons facilement que pour la hauteur de ce niveau on a,

$$z = \frac{RT}{g}, \quad H = RT, \quad (1)$$

où $H = gz$ est le géopotentiel absolu;

c) la vitesse du vent géostrophique de ce niveau est équivalente au vent géostrophique moyen pour toute l'atmosphère;

d) les propriétés susmentionnées sont aussi vérifiées approximativement dans la couche de 500–300 mb, dont le milieu se trouve à environ 7 km.

Les propriétés, du niveau énergétique moyen énumérées permettent de le considérer comme représentatif pour l'atmosphère libre. C'est ce qui détermine l'importance de la recherche des éléments météorologiques à ce niveau.

Dans cette étude, on examine à l'aide de la statistique la structure d'espace du géopotentiel et de sa tendance $\bar{H}$ seulement.

2. Dédution des équations générales

On sait d'après les observations que les changements locaux de la température dans l'atmosphère libre dépendent avant tout de l'advection horizontale.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = -u \frac{\partial T}{\partial x} - v \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (2)$$

Nous considérerons le vent comme quasi-géostrophique, c'est-à-dire

$$u = -\nabla_y \psi, v = \nabla_x \psi \approx \frac{1}{\Omega} H_p \quad (3)$$

où $\nabla_s = \partial/\partial s$ et $\Omega = 2 \omega \sin \varphi$. En remplaçant (1) dans (2) nous obtenons une équation analogue pour le géopotentiel H du niveau moyen énergétique.

$$\frac{\partial H_p}{\partial t} = -u \frac{\partial H_p}{\partial x} - v \frac{\partial H_p}{\partial y}.$$

Pour plus de commodité, nous utiliserons en dehors des notations (x, y) , (u, v) , les notations (x_1, x_2) , (u_1, u_2) . Prenant en considération que, d'après (3), le vecteur de la vitesse est solénoïdal ($\text{div } \mathbf{v} = 0$), l'équation précédente s'écrit sous la forme suivante :

$$\dot{H}_p = -\frac{\partial}{\partial x_1} u_1 H_p, \quad (4)$$

où il faut effectuer la sommation des indices répétés $i = 1, 2$.

Nous décomposerons u_i et H_p de la manière suivante :

$$u_i = U_i + v_i, \quad H_p = \bar{H}_p + H,$$

où U et $\bar{H}_p$ sont des valeurs moyennes (les normales climatiques) de ces grandeurs et v_i et H , leurs déviations (macrofluctuations). Nous supposons que $U_i = \text{const}$, et que $\bar{H}_p$ dépende seulement des coordonnées. Dans ce cas au lieu de (4), nous aurons

$$\frac{\partial H}{\partial t} = -(U_i + v_i) m_i - \frac{\partial}{\partial x_1} (U_i + v_i) H, \quad (5)$$

où $m_i = \partial \bar{H}_p / \partial x_i$.

Supposons que les champs bidimensionnels aléatoires v_i et H soient homogènes et isotropes et unis d'une manière homogène et isotrope dans le sens propre de ces notions. De cette dernière supposition, il suit que (OBOUKHOV, 1954)

$$\overline{v_i H'} = \overline{v_i' H} = \overline{v_i H} = 0 \quad (6)$$

où $f' = f(x'_1, x'_2)$, avec $f = v_i, H$. En outre, nous pouvons écrire que

$$\left. \begin{aligned} B_{HH}(r) &= \overline{HH'}, \quad B_{\dot{H}\dot{H}}(r) = \overline{\dot{H}\dot{H}'}, \\ B_{ij}(r) &= \overline{v_i v_j'} = -\frac{1}{r} B'_{uu}(r) r_i r_j + \left(r \frac{d}{dr} + 1\right) B_{uu}(r) \delta_{ij}, \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

où $v_i = x'_i - x_i$, $(') = \partial/\partial r$ et où $B_{uu}(r)$ est la fonction longitudinale corrélative de la vitesse.

Si nous écrivons l'équation (5) pour le point (x'_1, x'_2) et si nous multiplions les deux équations membre par membre, nous obtenons, en prenant la moyenne (du point de vue statistique),

$$B_{\dot{H}\dot{H}} = -\frac{\partial^2}{\partial r_1 \partial r_j} \overline{HH'} (U_i + v_i) (U_j + v_j') + m_i m_j (U_i U_j + \overline{v_i v_j'}). \quad (8)$$

Cela étant, nous introduisons l'hypothèse suivante : les répartitions des probabilités portant sur les valeurs de la vitesse v_α et du géopotentiel H en deux points différents de la surface plane sont proches de la normale, de cette manière les moments impairs du type $\overline{HH'v_i}$ et $\overline{HH'x'_i}$ sont identiquement égaux à zéro, et

$$\overline{HH'v_i v_j'} = B_{HH}(r) B_{ij}(r). \quad (9)$$

Choisissons en outre l'axe 0_x dans la direction du vent moyen U . Nous examinerons le courant zonal avec la vitesse U . Cela signifie que $U_1 = U$ et $U_2 = 0$ (Fig. 1) et que $m_1 = 0$, $m_2 = m$, c'est-à-dire que seul existe le gradient méridien de $\bar{H}_p$.

En prenant tout cela en considération, nous obtenons, au lieu de (8),

$$\begin{aligned} B_{\dot{H}\dot{H}}(r, \theta) &= -U^2 \left(B'_{HH} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} B'_{HH} \sin^2 \theta \right) \\ &+ m^2 (B_{uu} + r B'_{uu} \cos^2 \theta) - \left(r \frac{d}{dr} + 2 \right) \frac{1}{r} B_{uu} B'_{HH}. \end{aligned} \quad (10)$$

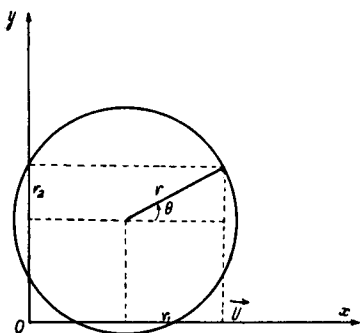


FIG. 1. Diagramme explicative de la formule (10).

Cependant les équations géostrophiques (3) permettent facilement d'obtenir:

$$B'_{HH}(r) = -\Omega^2 r B_{uu}(r). \quad (11)$$

D'autre part, le courant zonal U est lié à la présence du gradient méridien du géopotiel moyen, de sorte que

$$U = -\Omega^{-1} \nabla_y \bar{H}_p = -m \Omega^{-1}.$$

Alors, au lieu de (10), nous obtenons finalement

$$B_{\dot{H}\dot{H}}(r, \theta) = -2U^2 \left(B''_{HH} \cos^2 \theta + \frac{1}{r} B'_{HH} \sin^2 \theta \right) + \frac{2\Omega^{-2}}{r} B'_{HH} B''_{HH}. \quad (12)$$

Par conséquent, le champ aléatoire $\dot{H}(x, y)$ est anisotrope sur la surface plane parce que la fonction corrélative $B_{\dot{H}\dot{H}}$ dépend non seulement de r , mais encore de θ . Remarquons en outre que le second terme de (12), qui résulte de la non linéarité de l'équation de départ (5), est isotrope.

Nous n'examinerons pas ici la fonction $B_{\dot{H}\dot{H}}(r, \theta)$, mais nous introduirons, en prenant la moyenne d'après θ , la fonction corrélative

$$B_{\dot{H}\dot{H}}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} B_{\dot{H}\dot{H}}(r, \theta) d\theta.$$

Nous obtenons, à l'aide de (12),

$$B_{\dot{H}\dot{H}}(r) = -U^2 \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} B_{HH} \right) + \Omega^{-2} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{d}{dr} B_{HH} \right)^2 \quad (13)$$

et, par conséquent, $B_{\dot{H}\dot{H}}(r) = B_{\dot{H}\dot{H}}(r, 45^\circ)$.

De cette manière nous avons réussi à exprimer la fonction corrélative du champ $\dot{H}$ uniquement par $B_{HH}(r)$.

3. Quelques conséquences de (13)

La formule (13) peut encore être écrite sous la forme suivante :

$$r B_{\dot{H}\dot{H}}(r) = \frac{d}{dr} (\Omega^{-2} B_{HH}'^2 - U r^2 B_{HH}'). \quad (13')$$

Conformément aux propriétés générales des fonctions corrélatives, $B_{HH}(0) = 0$. Admettons que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r B_{HH}'(r) = 0, \text{ de (13')}$$

il résulte alors que

$$\int_0^\infty B_{\dot{H}\dot{H}}(r) r dr = 0. \quad (14)$$

Ceci montre que $B_{\dot{H}\dot{H}}(r)$ peut prendre des valeurs négatives.

On sait (OBOUKHOV, 1954), que la densité spectrale $\phi_H(k)$ du champ scalaire aléatoire bidimensionnel $f(x, y)$ est liée à la fonction corrélative par la formule

$$\phi_H(k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty B_H(r) J_0(kr) r dr. \quad (15)$$

Appliquant cette formule dans (13), nous obtenons

$$\phi_{\dot{H}\dot{H}}(k) = U^2 \phi_{HH}(k) + \frac{k}{2\pi \Omega^2} \int_0^\infty B_{HH}'^2(r) J_1(kr) dr \quad (16)$$

où $J_0(x)$ et $J_1(x)$ sont les fonctions de Bessel d'ordre zéro et de rang un.

Posons, dans (13), $r = 0$. Après certaines transformations, nous obtenons

$$\sigma_H^2 = \left(U^2 + \frac{1}{2\Omega^2} \sigma_{\nabla H}^2 \right) \sigma_{\nabla H}^2, \quad (17)$$

où

$$\sigma_{\nabla H}^2 = \overline{(\nabla H)^2} = 2\pi \int_0^\infty \phi_{HH}(k) k^3 dk; \quad \sigma_H^2 = B_{\dot{H}\dot{H}}(0)$$

représente la dispersion du gradient du géopotiel. Toutefois, conformément à (11), on a

$$\sigma_c^2 = \Omega^{-2} \sigma_{\nabla H}^2, \quad (18)$$

où, à cause de l'isotropie bidimensionnelle, $\sigma_c^2 = 2\sigma_u^2 = 2\sigma_v^2$, de sorte que

$$\sigma_H^2 = (U^2 + \frac{1}{2}\sigma_c^2) \sigma_{\nabla H}^2. \quad (19)$$

4. Etude d'un cas particulier

Admettons que la fonction corrélative du géopotentiel soit du type gaussien

$$B_{HH}(r) = \sigma_H^2 e^{-\alpha^2 r^2}. \quad (20)$$

Le dépouillement des données empiriques montre que $\alpha \sim 10^{-6} m^{-1}$. Alors

$$\sigma_c^2 = 4\Omega^{-2} \sigma_H^2 \alpha^2, \quad (21)$$

$$B_{\dot{H}\dot{H}}(r) = 4U^2 \sigma_H^2 \alpha^2 (1 - \alpha^2 r^2) e^{-\alpha^2 r^2} + 2\sigma_c^2 \sigma_H^2 \alpha^2 (1 - 2\alpha^2 r^2) e^{-2\alpha^2 r^2}, \quad (22)$$

$$\sigma_{\dot{H}}^2 = 2(2U^2 + \sigma_c^2) \sigma_H^2 \alpha^2, \quad (23)$$

$$\phi_{HH}(k) = \frac{\sigma_H^2}{4\pi\alpha^2} e^{-k^2/4\alpha^2}, \quad (24)$$

$$\phi_{\dot{H}\dot{H}}(k) = \frac{\sigma_{\dot{H}}^2}{4\pi\alpha^2} (U^2 e^{-k^2/4\alpha^2} + \frac{1}{2}\sigma_c^2 e^{-k^2/8\alpha^2}) k^2. \quad (25)$$

Il en ressort que $\phi_{\dot{H}\dot{H}}(k) > 0$, de sorte que la fonction (22) peut être corrélative.

On sait que, pour les mouvements de grande échelle, on a, $U \sim \sigma_c$. Alors, pour le coefficient de l'autocorrélation, nous obtenons ($x = \alpha r$)

$$R_{\dot{H}\dot{H}}(x) = \frac{B_{\dot{H}\dot{H}}(r)}{B_{\dot{H}\dot{H}}(0)} = \frac{2}{3}(1 - x^2)e^{-x^2} + \frac{1}{3}(1 - 2x^2)e^{-2x^2}. \quad (26)$$

Comme il ressort de la fig. 2, où cette dépendance est représentée graphiquement, $B_{\dot{H}\dot{H}}(r)$ a effectivement un secteur négatif. En remplaçant (22) dans (14), nous vérifions immédiatement si cette condition est vérifiée.

Il est aussi d'un grand intérêt de trouver la grande échelle de l'intégrale de la corrélation

$$L_{\dot{H}} = \frac{1}{\sigma_{\dot{H}}^2} \int_0^\infty B_{\dot{H}\dot{H}}(r) dr.$$

A l'aide de (22) nous obtenons

Tellus XVII (1965), 1

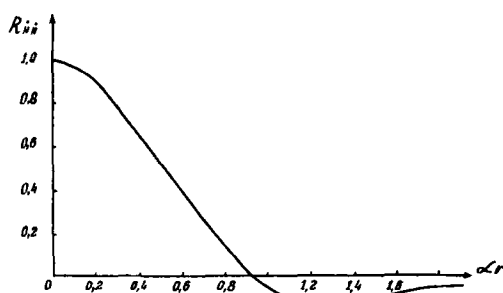


FIG. 2. Coefficient de corrélation des changements locaux du géopotentiel.

$$L_H = \frac{U^2 + \sigma_c^2/2\sqrt{2}}{2(2U^2 + \sigma_c^2)} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}.$$

Pour $U \sim \sigma_c$, on a,

$$L_H = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{12\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha}. \quad (27)$$

De même, on a

$$L_H = \frac{1}{\sigma_{\dot{H}}^2} \int_0^\infty B_{\dot{H}\dot{H}}(r) dr = \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha}$$

et, par conséquent,

$$L_{\dot{H}} = \frac{1 + 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} L_H \approx 0,45 L_H; \quad (28)$$

d'où pour $\alpha^{-1} \sim 10^3$ km, nous obtenons $L_{\dot{H}} \approx 400$ km.

5. Conclusion

Dans cette étude, parallèlement aux faits que les observations ont permis d'établir, quelques hypothèses de travail ont été utilisées, en premier lieu l'hypothèse de la quasi-normalité. Malheureusement, une vérification directe des résultats théoriques obtenus ne peut être effectuée parce qu'on ne possède pas encore de données empiriques sur la corrélation d'espace de $\dot{H}$. Un intérêt tout spécial présente la vérification de la dépendance de $B_{\dot{H}\dot{H}}$ de l'angle θ . Conformément à (12), r étant fixé, il existe une direction θ_0 de la corrélation zéro, qui est déterminée par l'équation

$$\cos^2 \theta_0(r) = \frac{(U\Omega)^{-2} B'_{HH} B''_{HH} - B'_{HH}}{r B''_{HH} - B'_{HH}}$$

quand (20) est pris en considération, nous avons

$$\cos^2 \theta_0(r) = \frac{2 + (1 - 2\alpha^2 r^2) e^{-\alpha^2 r^2}}{4\alpha^2 r^2}.$$

D'où, pour $\alpha r = 1$, nous obtenons

$$\cos^2 \theta_0 \left(\frac{1}{\alpha} \right) = \frac{2 - e^{-1}}{4} \approx 0,41.$$

Par conséquent $\theta_0(1/\alpha) \approx 50^\circ$.

Nous obtenons approximativement les mêmes résultats si, à la place de $B_{HH}(r)$, au lieu de (20), nous utilisons un autre modèle vérifié empiriquement

$$B_{HH}(r) = \sigma_H^2 (1 + \beta r) e^{-\beta r},$$

en posant $\beta = \sqrt{2} \alpha$.

BIBLIOGRAPHIE

BORISSENKOV, E. P., 1960, *Questions énergétiques des processus atmosphériques*, pp. 119–131. Leningrad.

OBOUKHOV, A. M., 1954, Description statistique des champs continus. Travaux de l'Institut Géophysique, A.S. U.R.S.S. no 24, pp. 3–42.