

Sur le taux de variation adiabatique de la température en fonction de la pression dans une masse d'air contenant un cristal de glace sphérique

L. DUFOUR, Institut Royal Météorologique de Belgique

(Manuscript received March 3, 1958)

Abstract

The formula giving the rate of variation is established under the assumption: 1) that the transformation is adiabatic (equ. 8); 2) that this transformation is reversible (equ. 15).

After having examined the order of magnitude of the different terms of the equations in order to determine those which can be neglected one can deduce the rate of variation (equ. 18).

One can show that the formulæ in the classical thermodynamics giving the rate of variation for saturated (equ. 21) and for dry air (equ. 22) are special cases of the general formula.

Considérons une masse d'air humide contenant un cristal de glace. Ce système comprend deux phases volumiques; une phase *prime* gazeuse et une phase *seconde* solide, séparées par une phase superficielle, et renferment deux constituants, l'air sec (*constituant 1*) qui n'existe que dans la phase *prime* et la phase superficielle et l'eau (*constituant 2*) qui existe dans les trois phases.

Si l'on se donne les masses totales des constituants du système, il suffit, pour que celui-ci soit complètement déterminé à l'équilibre, en admettant que le cristal soit sphérique (DEFAY et PRIGOGINE, 1951, chap. XV), de se donner deux variables intensives (DUFOUR et DEFAY, 1952). Si l'on veut étudier les transformations adiabatiques du système, il s'introduit une relation d'adiabaticité et le système est alors déterminé par une seule variable indépendante; le problème que nous nous proposons d'étudier est donc bien posé.

Supposons d'abord que les adsorptions sont négligeables, c'est-à-dire que

$$\Gamma_1 \cong 0, \Gamma_2 \cong 0 \quad (1)$$

où Γ_1 et Γ_2 sont les adsorptions de l'air sec et de l'eau. Cette hypothèse peut se justifier en admettant que la surface de tension est pratiquement confondue avec la surface de division qui annule l'adsorption de l'eau et que l'adsorption de l'air sec est négligeable sur cette surface.

Il résulte de (1), le système étant supposé fermé, que

$$dm'_1 \cong 0, \quad dm'_2 + dm''_2 \cong 0, \quad (2)$$

où m'_1 , m'_2 sont les masses de l'air sec et de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse et m''_2 la masse de la phase solide.

Supposons ensuite que les enthalpies superficielles spécifiques latérales de l'air sec et de la vapeur d'eau dans la phase gazeuse peuvent être négligées à l'équilibre

$$\alpha'_1 \cong 0, \alpha'_2 \cong 0, \quad (3)$$

hypothèse que l'on peut justifier en disant, faute de données expérimentales, qu'il est naturel de penser que ces enthalpies sont du même ordre de grandeur que les potentiels

chimiques latéraux qui eux s'annulent à l'équilibre (DEFAY, 1934, § 36). Rappelons que l'enthalpie spécifique latérale de l'eau dans la phase solide est nulle

$$\alpha_2'' = 0, \quad (4)$$

car il n'y a pas d'enthalpie spécifique latérale dans les phases à un seul constituant (DUFOUR, 1956; équat. 5.44)

Supposons également que l'air sec et la vapeur d'eau constituant la phase gazeuse sont des gaz parfaits (OMI, 1951). On peut alors écrire que

$$V' = \frac{m_1' R_1 T}{p' - p_2'} \quad (5)$$

où V' est le volume de la phase gazeuse, p' la pression de cette phase, p_2' la pression partielle de la vapeur d'eau dans cette phase, T la température et R_1 la constante spécifique des gaz parfaits pour l'air sec.

Supposons aussi que la tension superficielle du cristal est constante

$$\sigma = \text{constante} \quad (6)$$

hypothèse que l'on est bien obligé de faire puisque l'on ignore actuellement comment varie cette grandeur.

Rappelons finalement que la chaleur de sublimation L_s d'un cristal de glace est approximativement égale à la chaleur de sublimation $L_{1\infty}$ d'une surface plane de glace, pour autant que le cristal ne soit pas trop petit (DUFOUR, 1954), c'est-à-dire que

$$L_s = h_2' - h_2'' \cong L_{s\infty} \quad (7)$$

où h_2' et h_2'' sont respectivement les enthalpies spécifiques de l'eau dans la phase gazeuse et dans la phase solide.

Exprimons maintenant que la transformation considérée est adiabatique, ce qui s'écrit, eu égard à (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7), de la façon suivante (DUFOUR, 1956, équat. 7.19, 5.53, 4.15):

$$(m_1' c_1' + m_2' c_2' + m_2'' c_2'') dT - \frac{m_1' R_1 T}{p' - p_2'} dp' + L_{s\infty} dm_2' = 0 \quad (8)$$

où c_1' et c_2' sont les chaleurs spécifiques à pression constante de l'air sec et de la vapeur d'eau et c_2'' la même chaleur spécifique de l'eau liquide.

Exprimons ensuite que cette transformation est réversible; on a (DUFOUR, 1956, équat. 6.16)

$$-L_{s\infty} dT - v_2'' T dp' - v_2'' T d\left(\frac{2\sigma}{r}\right) + R_2 T^2 \frac{dp_2'}{p_2'} = 0 \quad (9)$$

où R_2 est la constante spécifique des gaz parfaits pour la vapeur d'eau et r le "rayon" du cristal. Celui-ci ayant été supposé sphérique, on peut écrire que

$$V'' = m_2'' v_2'' = \frac{4}{3} \pi r^3 \quad (10)$$

où V'' est le volume du cristal et v_2'' , son volume spécifique. En dérivant cette relation, on obtient, compte tenu de (2), la relation suivante

$$dm_2' = -\frac{1}{v_2''} 4\pi r^2 dr. \quad (11)$$

Rappelons que, par définition, le rapport de mélange r_v est donné par la relation

$$r_v = \frac{m_2'}{m_1'} = \frac{\varepsilon p_2'}{p' - p_2'} \quad (12)$$

où

$$\varepsilon = \frac{R_1}{R_2} \quad (12)$$

est la gravité spécifique de la vapeur d'eau.

En différenciant la relation (12), on trouve que

$$\frac{dp_2'}{p_2'} = \frac{dp'}{p'} + \frac{p' - p_2'}{p'} \frac{dm_2'}{m_2'}. \quad (14)$$

Compte tenu de (6), (11) et (14), l'équation (9) prend la forme suivante

$$L_{s\infty} dT - \left(\frac{R_2 T^2}{p'} - v_2'' T \right) dp' - R_2 T^2 \left(\frac{p' - p_2'}{p' m_2'} - \frac{\sigma (v_2'')^2}{2\pi R_2 T r^4} \right) dm_2' = 0. \quad (15)$$

Pour trouver le taux de variation de la température en fonction de la pression dans la masse d'air considérée, il suffit d'éliminer dm_2' entre les équations (8) et (15). On se rend immédiatement compte que la relation à laquelle on arriverait ainsi serait compliquée. C'est pourquoi, avant d'effectuer cette élimination, nous avons examiné l'ordre de

grandeur des différents termes de ces deux équations afin de déterminer ceux qui pouvaient être négligés.

Dans l'atmosphère, on peut toujours, en première approximation, négliger $m'_2 c''_2$ devant $m'_1 c'_1 + m'_2 c'_2$ et $v''_2 T$ devant $R_2 T^2 / p'$. Compte tenu de ces approximations, les équations (8) et (15) s'écrivent.

$$(m'_1 c'_1 + m'_2 c'_2) dT - \frac{m'_1 R_1 T}{p' - p_2} dp' + L_s \infty dm'_2 \cong 0 \quad (16)$$

et

$$L_s \infty dT - \frac{R_2 T^2}{p'} dp' - R_2 T^2 \left(\frac{p' - p_2}{p' m'_2} - \frac{\sigma (v''_2)^2}{2\pi R_2 T r^4} \right) dm'_2 \cong 0. \quad (17)$$

En éliminant dm'_2 entre (16) et (17) on trouve, eu égard à (12) et (13),

$$\frac{dT}{dp'} = \frac{x}{y} \quad (18)$$

où

$$x = \frac{R_1 T}{p' - p_2} \left[1 + \frac{r_v L_s \infty}{R_1 T \left(1 - \frac{m'_2 (\varepsilon + r_v) (v''_2)^2 \sigma}{2\pi R_1 T r^4} \right)} \right] \quad (19)$$

et

$$y = c'_1 + r_v c'_2 + \frac{r_v (\varepsilon + r_v) (L_s \infty)^2}{R_1 T^2 \left(1 - \frac{m'_2 (\varepsilon + r_v) (v''_2)^2 \sigma}{2\pi R_1 T r^4} \right)}. \quad (20)$$

Dans le cas particulier où le système au lieu de contenir la glace en cristal la contient en "masse", le terme entre guillemets devant être compris dans le sens que m'_2 est suffisamment grand pour que la capillarité ne joue plus ($r = \infty$), l'équation (18) s'écrit

$$\frac{dT}{dp'} = \frac{\frac{R_1 T}{p' - p_2} \left(1 + \frac{r_v L_s \infty}{R_1 T} \right)}{c'_1 + r_v c'_2 + \frac{r_v (\varepsilon + r_v) (L_s \infty)^2}{R_1 T^2}} \quad (21)$$

et l'on retrouve la relation donnant la variation de la température en fonction de la pression pour une transformation adiabatique de l'air humide saturé.

Dans le cas particulier où le rayon de la gouttelette est "nul", le terme entre guillemets devant être compris dans le sens que la gouttelette est suffisamment petite pour que son rayon puisse être considéré comme nul ($r = 0$), l'équation (18) s'écrit

$$\frac{dT}{dp'} = \frac{\frac{R_1 T}{p' - p_2}}{c'_1 + r_v c'_2} \quad (22)$$

et l'on retrouve la relation donnant la variation de la température en fonction de la pression dans une transformation adiabatique d'air humide non saturé.

Dans le pratique, on néglige généralement p'_2 devant p' , $r_v c'_2$ devant c'_1 et r_v devant ε . Avec ces approximations, les relations (21) et (22) prennent les formes classiques suivantes (VAN MIEGHEM ET DUFOUR, 1948, 50 et 71).

$$\frac{dT}{dp'} \cong \frac{\frac{R_1 T}{p'} \left(1 + \frac{r_v L_s \infty}{R_s T} \right)}{c'_1 + \frac{\varepsilon r_v (L_1 \infty)^2}{R_1 T^2}} \quad (23)$$

et

$$\frac{dT}{dp'} \cong \frac{R_1 T}{c'_1 p'}. \quad (24)$$

BIBLIOGRAPHIE

- OMI, 1951: Valeurs de quelques fonctions et constantes physiques utilisées en météorologie. *Organisation météorologique internationale. Publication n° 79*.
- DEFAY, R., 1934: *Etude thermodynamique de la tension superficielle* (Inst. belge de recherches radioscientifiques, vol. III). Paris; Gauthier-Villars.
- DEFAY, R., et PRIGOGINE, I., 1951: *Tension superficielle et adsorption*. Liège, Desoer.
- DUFOUR, L., 1956: Thermodynamique des systèmes capil-

laires dans l'atmosphère. *Inst. roy. mét. Belgique Publications, sér. B, n° 20*.

- DUFOUR, L., et DEFAY, R., 1952: Extension du théorème de Duhem en vue des applications à la thermodynamique de l'atmosphère. *Journ. scient. mét.*, 4, pp. 1-4.
- VAN MIEGHEM, J., et DUFOUR, L., 1948: Thermodynamique de l'atmosphère. *Inst. roy. mét. Belgique, Mémoires, vol. XXX*.