

Ein numerisches Verfahren zur Errechnung von Windstau und Gezeiten in Randmeeren¹

Von GÜNTER FISCHER,* International Meteorological Institute in Stockholm

(Manuscript received July 5, 1958, revised September 18, 1958)

Abstract

A finite difference method for determining water heights and movements in adjacent seas is developed. For this purpose the vertically integrated equations of motion and the continuity equation are transformed into an explicit system of difference equations, which are solved stepwise in time with an electronic computer. The question of numerical stability is investigated in detail. To obtain computational stability for the system in question, it is not sufficient to satisfy a condition similar to the Courant Friedrichs Lewy criterion, as there is also an upper limit of the timestep itself, which depends on the frictional coefficient and the Coriolis parameter. The influence of a smoothing technique and the mesh size of the grid on the results is also examined. Some computations of storm surges and tides in the North Sea are presented and are compared in selected cases with the results of other methods or with observations. The computations of tidal waves and currents in the North Sea, where the wave was prescribed only at the open ends, give a reasonable agreement with observed conditions.

I. Einleitung

Die Ermittlung vieler stationärer und insbesondere nichtstationärer Bewegungsvorgänge in den Ozeanen, Randmeeren und sonstigen Wasserbecken auf analytischem Wege stösst auf grosse Schwierigkeiten. Bei dem grossen Interesse jedoch, das die nähere Erforschung dieser Bewegungsvorgänge beansprucht, erscheint es im Zeitalter der Elektronenrechenmaschinen zweckmässig, durch numerische Integration der sie beschreibenden Differentialgleichungen zu Lösungen zu gelangen.

¹ The investigation reported in this paper has been sponsored by the Office of Naval Research, Washington, under contract No. Nonr.-1143(00) subcontract No. 1 through Woods Hole Oceanographic Institution.

* Present affiliation: Geophysikalisches Institut, Universität Hamburg.

Die Gleichungen, die den folgenden Rechnungen zugrunde liegen, sind die vertikal integrierten Bewegungsgleichungen und die vertikal integrierte Kontinuitätsgleichung. Diese werden durch ein System von Differenzgleichungen angenähert. Bei der Auswahl des Differenzschemas ist, besonders wenn es als Annäherung an ein hyperbolisches Differentialgleichungssystem gelten soll, grosse Vorsicht geboten. Die Annäherung einer Differentialgleichung durch eine Differenzgleichung beinhaltet nämlich nicht, dass auch die Lösungen beider einander nahe liegen. Hier tritt die Frage nach der numerischen Stabilität und nach der Güte der Approximation auf. Erstere ist zumindest notwendig, damit die numerisch erhaltene Lösung eine Annäherung an die exakte darstellt. Deshalb ist eine eingehende Untersuchung angestellt worden, ob

und unter welchen Umständen das benutzte Differenzenschema stabile Lösungen ergeben wird; das hängt wesentlich, wie im Kapitel III gezeigt werden wird, von der Art der Annäherung und von der Grösse einzelner Parameter ab.

Ueber die Güte der Approximation etwas auszusagen, ist dagegen im Vorwege nicht möglich. Deshalb wurde im Kapitel IV der Versuch unternommen, durch Vergleich mit einfachen analytischen Lösungen empirisch ein Bild über die auftretenden Abweichungen zu gewinnen. Auch die Stabilitätsverhältnisse werden in diesem Kapitel an Hand von Beispielen geprüft.

Eine praktische Anwendung wird im Kapitel V und im Kapitel VI bei der Bestimmung des Windstaus und der Gezeiten in der Nordsee gegeben. Hierbei ist vielfach ein Vergleich mit den Beobachtungen und mit den Ergebnissen anderer Methoden möglich und damit ein Mass für die Anwendbarkeit geschaffen.

Diese Untersuchungen wurden von Herrn Prof. Rossby angeregt und sind als Fort- und Weiterführung der von HANSEN (1956) durchgeführten Rechnungen anzusehen. Das Problem ist hier jedoch von Grund auf neu behandelt worden, insbesondere ist ein anderes Differenzenschema als Annäherung gewählt worden. Die Durchführung der Rechnungen geschah auf der schwedischen Rechenmaschine BESK.

II. Die benutzten Differential- und Differenzengleichungen

Die Bewegungen in Flüssigkeiten und Gasen werden durch die hydrodynamischen Differentialgleichungen mathematisch dargestellt. Zur näheren Erläuterung denke man sich ein Wasserbecken nicht unbedingt konstanter Tiefe, welches unter dem Einfluss äusserer Kräfte steht, und/oder dessen Zustand zu einer bestimmten Zeit vorgeschrieben wurde und fragt nach der zeitlichen Änderung der Feldgrössen. Das Wasser sei homogen und inkompressibel, d. h., wenn u, v, w die Geschwindigkeitskomponenten in der x, y, z -Richtung bedeuten, dass $\text{div } \mathbf{v} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ verschwinden soll. Hydrostatisches Gleichgewicht sei ebenfalls angenommen.

Wegen der Homogenität der Wassermassen können die Bewegungsgleichungen und die

Kontinuitätsgleichung im Vorwege über die Tiefe von $z=0$ bis $z=h+\zeta$ integriert werden. Dabei bedeutet $z=0$ der Boden, $z=h$ die ungestörte Wasseroberfläche und ζ die Abweichung von der ungestörten Oberfläche.

Unter Vernachlässigung sehr kleiner Grössen und der nichtlinearen Glieder, die man jedoch nicht zu vernachlässigen braucht, erhält man so folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{\partial U}{\partial t} &= -g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial x} + fV - rU + \tau_x \\ \frac{\partial V}{\partial t} &= -g(h+\zeta) \frac{\partial \zeta}{\partial y} - fU - rV + \tau_y \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}\right) \end{aligned}$$

Es bedeuten:

$U = \int_0^{h+\zeta} u \, dz$, $V = \int_0^{h+\zeta} v \, dz$ Komponenten des horizontalen Wassertransportes.

$f = 2\omega \sin \varphi$ Coriolisparameter.

Der Tangentialschub am Boden $\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0$, $\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0$ wurde nach einer Durchführung der Ekmantheorie für Flachwassergebiete mit guter Näherung zu: $\nu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 = rU$, $\nu \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 = rV$ mit $r = \frac{\nu \pi^2}{4h^2}$ gesetzt; ν ist der turbulente Austauschkoefizient.

Der Windschub an der Wasseroberfläche:

$\tau_x = \nu \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_{h+\zeta}$, $\tau_y = \nu \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_{h+\zeta}$ wurde, wie allgemein üblich, zu: $\tau_x = \gamma u_L |w_L|$, $\tau_y = \gamma v_L |w_L|$ angenommen; u_L und v_L sind die Windkomponenten, $|w_L|$ die Windgeschwindigkeit, γ ist eine Konstante.

Da im allgemeinen $\zeta \ll h$ ist, wird im folgenden gh statt $g(h+\zeta)$ gesetzt.

Durch Elimination von U und V erhalte man aus 1) mit $h=\text{const.}$ und $\tau_x=\tau_y=0$:

$$\begin{aligned} 1 \text{ a) } \quad \frac{\partial^3 \zeta}{\partial t^3} &= -2r \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} - (f^2 + r^2 - gh \nabla^2) \frac{\partial \zeta}{\partial t} + rgh \nabla^2 \zeta; \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{aligned}$$

Sei nun Δt ein Zeitschritt, $\Delta x = \Delta y = \Delta s$ die Gitterkonstante. Die 1) annähernden Differen-

zengleichungen mögen folgende Form besitzen:

2)

$$\begin{aligned} U^{(t+1)}(x, y) &= U^{(t)}(x, y) - \frac{gh(x, y)\Delta t}{2\Delta s} \left\{ \zeta^{(t)}(x + \Delta x, y) - \right. \\ &\quad \left. - \zeta^{(t)}(x - \Delta x, y) \right\} + \\ &\quad + \Delta t \left\{ fV^{(t)}(x, y) - r(x, y)U^{(t)}(x, y) + \tau_x^{(t)}(x, y) \right\} \\ V^{(t+1)}(x, y) &= V^{(t)}(x, y) - \frac{gh(x, y)\Delta t}{2\Delta s} \left\{ \zeta^{(t)}(x, y + \Delta y) - \right. \\ &\quad \left. - \zeta^{(t)}(x, y - \Delta y) \right\} + \\ &\quad + \Delta t \left\{ -fU^{(t)}(x, y) - r(x, y)V^{(t)}(x, y) + \tau_y^{(t)}(x, y) \right\} \\ \zeta^{(t+1)}(x, y) &= \zeta^{(t)}(x, y) - \frac{\Delta t}{2\Delta s} \left\{ U^{(t+1)}(x + \Delta x, y) - \right. \\ &\quad - U^{(t+1)}(x - \Delta x, y) + V^{(t+1)}(x, y + \Delta y) - \\ &\quad \left. - V^{(t+1)}(x, y - \Delta y) \right\} \end{aligned}$$

Dabei ist abkürzend z. B.: $U(x, y, t + \Delta t) \equiv U^{(t+1)}(x, y)$ geschrieben.

Für ζ allein folgt aus 2) die 1 a) entsprechende Gleichung:

$$\begin{aligned} 2 \text{ a) } \zeta^{(t+1)}(x, y) - 3\zeta^{(t)}(x, y) + 3\zeta^{(t-1)}(x, y) - \zeta^{(t-2)}(x, y) &= -2r \left(\zeta^{(t)}(x, y) - 2\zeta^{(t-1)}(x, y) + \zeta^{(t-2)}(x, y) \right) - \\ &\quad - (f^2 + r^2 - gh\nabla_k^2) \left(\zeta^{(t)}(x, y) - \zeta^{(t-1)}(x, y) \right) + ghr \nabla_k^2 \zeta^{(t)}(x, y) \end{aligned}$$

$$\text{mit: } \nabla_k^2 \zeta = \frac{1}{\Delta s^2} \left\{ \zeta(x + \Delta x, y) + \zeta(x - \Delta x, y) + \right. \\ \left. + \zeta(x, y + \Delta y) + \zeta(x, y - \Delta y) - 4\zeta(x, y) \right\}$$

welche jedoch keine direkte Anwendung finden wird, sondern nur zum Vergleich hingeschrieben wurde.

Nach 2) werden die U , V und ζ -Werte an jedem Gitterpunkt berechnet. Zuerst wird das „neue“ $U^{(t+1)}$, $V^{(t+1)}$ -Feld aus den ersten beiden Gleichungen bestimmt und danach zur Berechnung der „neuen“ $\zeta^{(t+1)}$ -Werte in die dritte Gleichung eingesetzt. An Randbedingungen wird vorgeschrieben, dass die Normalkomponente der Wasserbewegung an den festen Rändern (Küsten) verschwindet und dass an den offenen Rändern ζ oder U und V als bekannt eingesetzt werden. Hierbei wurde

so vorgegangen, dass z. B. an einem festen Rand $x = \text{const.}$ — wo U verschwindet — V allein aus der zweiten Gleichung bestimmt wurde, ohne Rücksichtnahme auf die noch verbleibenden Glieder in der ersten Gleichung. Liessen sich an den Rändern keine zentrierten Differenzen anwenden, wurde auf nichtzentrierte übergegangen. In den inneren Eckpunkten wurden zwei Bedingungen vorgeschrieben, z. B. $U = 0$ und $V = 0$.

III. Theoretische Untersuchung über die numerische Stabilität der Differenzgleichungen

Das zugrundegelegte Gleichungssystem 1) ist vom hyperbolischen Typ, und eine Untersuchung, ob und unter welchen Umständen numerische Stabilität vorliegt, wäre sehr wünschenswert. Im folgenden soll versucht werden, auf theoretischer Grundlage eine Abschätzung über die Brauchbarkeit des benutzten Systems 2) zu erhalten. Soweit es sich bei den folgenden Ausführungen um die mathematische Stabilität handelt, bildet dieses Kapitel eine spezielle Anwendung der von LAX und RICHTMYER (1956) sowie von KREISS (1958) erschienenen Arbeiten über die numerische Stabilität von Systemen von Differenzgleichungen. Da jedoch nicht notwendig aus der mathematischen Stabilität die für die Praxis sehr wichtige rechnerische folgt, sind über letztere noch weitergehende Untersuchungen angestellt worden.

Vorausgesetzt sei für die Theorie, dass 1) als reines Anfangswertproblem mit konstanten Koeffizienten und verschwindenden äusseren Kräften behandelt wird. Um für alle Gleichungen dieselben Dimensionen zu erlangen, werde $\sqrt{gh} \zeta = -\Phi$ gesetzt.

Die Lösung der Differentialgleichung kann nun für ein begrenztes Gebiet in Form einer Fourierreihe angegeben werden. Somit lässt sich mit einem individuellen Fourierglied folgender Ansatz machen:

$$\begin{aligned} 3) \begin{pmatrix} U \\ V \\ \phi \end{pmatrix} &\equiv \mathbf{V}(x, y, t) = \star \mathbf{V}(k_1, k_2, t) e^{i(k_1 x + k_2 y)}; \\ &k_1, k_2 \text{ reell.} \end{aligned}$$

In die Differenzgleichungen 2) mit $h =$

= const., $\tau_x = \tau_y = 0$ eingesetzt, ergibt sich folgendes System:

$$4) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -ia & -ib & 1 \end{pmatrix} \star \mathbf{V}^{(t+1)} = \begin{pmatrix} 1 - r\Delta t & f\Delta t & ia \\ -f\Delta t & 1 - r\Delta t & ib \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \star \mathbf{V}^{(t)}$$

mit: $a = \frac{\sqrt{gh} \Delta t}{\Delta s} \sin k_1 \Delta x$, $b = \frac{\sqrt{gh} \Delta t}{\Delta s} \sin k_2 \Delta y$

Da die Matrix auf der linken Seite nicht-singulär ist, kann man die Gleichung 4) nach $\star \mathbf{V}^{(t+1)}$ auflösen und erhält:

$$5) \quad \star \mathbf{V}^{(t+1)} = \begin{pmatrix} 1 - r\Delta t & f\Delta t & ia \\ -f\Delta t & 1 - r\Delta t & ib \\ ia(1 - r\Delta t) - ibf\Delta t & ib(1 - r\Delta t) + ia f\Delta t & 1 - (a^2 + b^2) \end{pmatrix} \star \mathbf{V}^{(t)} \\ \star \mathbf{V}^{(t)} = G \star \mathbf{V}^{(t)}$$

Ist nun der Angangswert $\star \mathbf{V}(t=0) = \star \mathbf{V}^{(0)}$ vorgeschrieben, so folgt daraus, dass nach n Zeitschritten, also zur Zeit $n \Delta t = t_0$ das System 5) die Form:

$$6) \quad \star \mathbf{V}^{(n)} = G^n \cdot \star \mathbf{V}^{(0)}$$

annimmt.

Verkleinert man jetzt den Zeitschritt Δt und die Gitterkonstante Δs und hält die Zeit $n \Delta t = t_0$ fest, so bekommt man im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) mit geeignetem $\frac{\Delta t}{\Delta s} = \text{const.}$ dann eine endliche Lösung, wenn dabei die Matrizen G^n beschränkt bleiben; das soll für jedes Glied der Fourierentwicklung also für jedes reelle k_1 und k_2 gelten.

Erfüllen die Matrizen die obigen Bedingungen, so soll das Differenzensystem mathematisch stabil genannt werden. Die mathematische Stabilität beinhaltet für sachgemässe Probleme, dass die Lösung des Differenzengleichungssystems im Grenzübergang gegen die Lösung des Differentialgleichungssystems konvergiert; ein Beweis hierzu findet sich bei LAX und RICHTMEYER (1956).

Im praktischen Rechengang wird jedoch Δt konstant gehalten und $n \Delta t = t$ ist variabel.

Daher muss auch noch untersucht werden, wie die Verhältnisse für diesen Fall liegen.

Analog zur mathematischen Stabilität soll eine rechnerische Stabilität folgendermassen definiert werden: ist die exakte Lösung für alle Zeiten endlich, so soll dieses auch für die numerische Lösung gelten. Dazu muss gefordert werden, dass für genügend kleines $\Delta t = \text{const.}$ und geeignetes $\frac{\Delta t}{\Delta s} = \text{const.}$, für $n \Delta t = t \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) und alle möglichen k_1 und k_2 , die G^n beschränkt bleiben. Die rechnerische Stabilität schliesst ein, dass Fehler mit der Zeit nicht anwachsen können.

Ueber die Güte der Approximation kann hierbei keine Aussage gemacht werden. Ist jedoch ebenfalls mathematische Stabilität vorhanden, so ist man sicher, dass für einen kleineren Zeitschritt und damit auch kleineren Gitterabstand, die numerische Lösung die exakte „besser“ annähern wird.

Ein einfaches Beispiel sei als Erläuterung eingeschoben. Gegeben werde die gewöhnliche Differentialgleichung:

$$7) \quad \frac{\partial u}{\partial t} = iau; \quad a \text{ reell}$$

Mit dem Anfangswert $u(t=0) = u^{(0)}$ ergibt sich als exakte Lösung: $u = u^{(0)} e^{iat}$, welche für alle Zeiten endlich bleibt.

Die Differenzengleichung habe die Form:

$$8) \quad u^{(t+1)} - u^{(t)} = ia \Delta t u^{(t)}$$

Mit der gegebenen Anfangsbedingung folgt für die feste Zeit $n \Delta t = t_0$, analog zu 6):

$$9) \quad u^{(n)} = (1 + ia \Delta t)^n u^{(0)} \equiv g^n u^{(0)}$$

Für $\Delta t \rightarrow 0$ geht 9) gegen die exakte Lösung für $t = t_0$, die g^n bleiben dabei beschränkt. Die Differenzengleichung ist also mathematisch stabil.

Für einen festen Zeitschritt dagegen bleibt die Lösung für t nicht mehr endlich, da $|g| > 1$ für jedes feste Δt ist. Die Differenzengleichung 9) ist also rechnerisch instabil. Man sieht also, dass aus der mathematischen Stabilität nicht ohne weiteres die rechnerische folgt.

Beiläufig sei darauf hingewiesen, dass für diesen speziellen Fall zentrierte Differenzen für genügend kleines Δt ein auch rechnerisch stabiles System ergeben.

Kehren wir jetzt nach diesem Beispiel zu der Gleichung 2) zurück und suchen nach

einem Mass für die Beschränktheit der Matrizen G^n . Eine untere Grenze für die Beschränktheit der G^n ist, dass die jeweiligen Eigenwerte λ_i^n unter den obengenannten Bedingungen beschränkt bleiben. Daraus folgt für ein mathematisch stabiles System, dass der Betrag des grössten Eigenwertes $|\lambda_{\max}|$ die von Neumann Bedingung:

$$10) \quad |\lambda_{\max}| \leq 1 + c\Delta t$$

erfüllen muss; c ist dabei eine Konstante.

Für ein rechnerisch stabiles System hingegen muss gefordert werden, dass

$$11) \quad |\lambda_{\max}| \leq 1$$

bleibt. (Zu den vorangegangenen Überlegungen wird man auch durch den Ansatz $\star \mathbf{V} = \star \star \mathbf{V} e^{i\omega t}$, mit $\lambda = e^{i\omega \Delta t}$, geführt.)

Die Beschränktheit der Eigenwerte ist eine notwendige Bedingung für die Stabilität. Eine notwendige und hinreichende Bedingung findet man u. a., wenn sich G in eine Diagonalmatrix transformieren lässt, so dass

$$12) \quad G = T^{-1}AT$$

ist. T besteht dabei aus den auf die Länge Eins normierten Eigenvektoren von G . A ist eine Matrix, deren Diagonalelemente die verschiedenen Eigenwerte sind, und deren andere Elemente aus Nullen bestehen. Möglich ist diese Transformation, wenn alle Eigenwerte verschieden sind. Wegen:

$$13) \quad G^n = T^{-1}A^nT$$

sind die G^n sicherlich beschränkt, wenn die λ_i^n beschränkt sind und T nichtsingulär ist, wenn also $|\det T| > 0$ für alle reellen k_1 und k_2 und ein bestimmtes $\frac{\Delta t}{\Delta s} = \text{const.}$ existiert.

Das eben Gefundene soll jetzt auf die Matrix G in 5) angewandt werden. Ihre Eigenwerte bestimmen sich aus der kubischen Gleichung:

$$(1 - r\Delta t - \lambda) \left\{ (1 - r\Delta t - \lambda)(1 - \lambda) + \lambda(a^2 + b^2) \right\} + (1 - \lambda)f^2\Delta t^2 = 0$$

Nach Hinzufügen des Gliedes $r\Delta t \cdot f^2\Delta t^2$, welches als sehr klein im Vergleich zu den übrigen Gliedern angenommen werden kann, falls $|r\Delta t| \approx |f\Delta t| \ll 1$ ist, lassen sich die Wurzeln der Gleichung leicht berechnen, und man erhält so folgende Eigenwerte:

$$14) \quad \lambda_1 = 1 - r\Delta t; \quad \lambda_{2,3} = 1 - \frac{r\Delta t}{2} - \frac{a^2 + b^2}{2} \pm \frac{i}{2} \sqrt{(a^2 + b^2 + r\Delta t)^2 - 4(a^2 + b^2 + f^2\Delta t^2)}$$

Für

$$15) \quad (a^2 + b^2 + r\Delta t)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + f^2\Delta t^2)$$

folgt:

$$16) \quad |\lambda_1| = |1 - r\Delta t|; \\ |\lambda_{2,3}| = \sqrt{1 - r\Delta t + f^2\Delta t^2} < 1 + f\Delta t$$

Die Bedingung 10) ist also erfüllt, wenn 15) gilt. Rechnet man weiter die Determinante der Eigenvektoren aus, so bleibt diese von Null verschieden, solange in 15) das Kleinerzeichen steht.

Indem man wieder für $a = \frac{\sqrt{gh}\Delta t}{\Delta s} \sin k_1\Delta x$

und $b = \frac{\sqrt{gh}\Delta t}{\Delta s} \sin k_2\Delta y$ schreibt und beachtet,

dass $|\sin^2 k_1\Delta x + \sin^2 k_2\Delta y| \leq 2$ für jedes reelle k_1 und k_2 ist, folgt also als notwendige und hinreichende Bedingung für mathematische Stabilität, dass

$$17) \quad gh \left(\frac{\Delta t}{\Delta s} \right)^2 < 1 - \frac{r\Delta t}{2} + \sqrt{1 - r\Delta t + f^2\Delta t^2}$$

sein muss.

Für $r=f=0$ erhielte man hieraus das Courant-Friedrichs-Lewy Kriterium für die Stabilität der einfachen Wellengleichung:

$$18) \quad \sqrt{gh} \frac{\Delta t}{\Delta s} < \sqrt{2}$$

Soweit es sich also um die mathematische Stabilität handelt, ist alles in Ordnung.

Damit aber auch die Bedingungen für rechnerische Stabilität erfüllt sind, muss ausserdem nach 11) und 16).

$$19) \quad \Delta t < \frac{r}{f^2}; \quad f \neq 0$$

sein, denn nur dann sind auch alle $|\lambda_i|$ kleiner als Eins.

Eine kleine Zwischenbemerkung soll hier eingeflochten werden, die beleuchtet, dass nicht jedes vernünftig erscheinende Differenzenverfahren als Annäherung geeignet ist. Schreibe man z. B. in der dritten Gleichung von 2) $U^{(i)}$ und $V^{(i)}$ anstelle von $U^{(i+1)}$ und $V^{(i+1)}$, was augenscheinlich auch eine Annäherung an die Differentialgleichung 1) bedeutet, so erhielte man statt 5)

$$20) \quad \star \mathbf{V}^{(t+1)} = \\ = \begin{pmatrix} 1 - r\Delta t, & f\Delta t, & ia \\ -f\Delta t, & 1 - r\Delta t, & ib \\ ia, & ib, & 1 \end{pmatrix} \star \mathbf{V}^{(t)} = G \cdot \star \mathbf{V}^{(t)}$$

G hat jetzt die Eigenwerte:

$$21) \quad \lambda_1 = 1 - r\Delta t; \\ \lambda_{2,3} = 1 - \frac{r\Delta t}{2} \pm i \sqrt{a^2 + b^2 + f^2 \Delta t^2 - \frac{r^2 \Delta t^2}{4}}$$

Wegen $|\lambda_{2,3}| = \sqrt{1 + a^2 + b^2 + f^2 \Delta t^2 - r\Delta t}$ lassen sich für jedes konstante Verhältnis $\frac{\Delta t}{\Delta s}$ die Eigenwerte nicht auf die Form 10) bringen; dieses System wäre also instabil.

Kurz zusammenfassend kann man sagen: Das Differenzensystem 2) ist mathematisch stabil, soweit es als Anfangswertproblem mit konstanten Koeffizienten behandelt wird. Im Grenzübergang $\Delta t \rightarrow 0$, $\Delta s \rightarrow 0$ $\frac{\Delta t}{\Delta s} = \text{const.}$ geht die numerische Lösung gegen die exakte, solange die Bedingung 15) gilt; die mathematische Stabilität bleibt auch erhalten, wenn keine Reibung existiert. Rechnerische Stabilität ist immer vorhanden, wenn die Corioliskraft verschwindet und Reibung mitgenommen wird und 15) mit $f=0$ erfüllt ist. Ohne Reibung aber mit Corioliskraft wird das System rechnerisch instabil. Wie die rechnerische Stabilität sich mit Corioliskraft und mit Reibung gestaltet, geht mit sehr grosser Näherung aus der Beziehung 19) hervor, wenn 15) befriedigt ist.

Für die praktische Rechnung treffen nun vielfach die für die Theorie gemachten Bedingungen: verschwindende äussere Kräfte, Linearität und konstante Koeffizienten, nicht zu. Das führte zu dem Entschluss, ausserdem ein Ausgleichsverfahren einzuführen. Zu diesem Zweck wurden nicht die $\mathbf{V}^{(t)}$ -Werte selbst auf den rechten Seiten von 2) benutzt, sondern ein mit der Umgebung gemittelter Wert $\bar{\mathbf{V}}^{(t)}$, so dass:

$$22) \quad \bar{\mathbf{V}}^{(t)}(x, y) = \alpha \mathbf{V}^{(t)}(x, y) + \frac{1 - \alpha}{4} \left\{ \mathbf{V}^{(t)}(x + \Delta x, y) + \right. \\ \left. + \mathbf{V}^{(t)}(x - \Delta x, y) + \mathbf{V}^{(t)}(x, y + \Delta y) + \right. \\ \left. + \mathbf{V}^{(t)}(x, y - \Delta y) \right\} \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

ist.

Tellus XI (1959), 1

Praktisch führte das dazu, dass nach jedem Zeitschritt das gesamte U , V und ζ -Feld, ausser an den Rändern, nach obiger Methode 22) ausgeglichen wurde; am Rande fand nur eine Ausgleicheung längs des Randes statt, um neue Randbedingungen zu vermeiden; Eckpunkte nahmen überhaupt nicht an der Ausgleicheung teil.

Rechnet man die Theorie mit dieser Ausgleicheung durch, so treten die schon errechneten Eigenwerte 14) und folgende mit einem Faktor μ multipliziert auf, wobei

$$23) \quad \mu = \alpha + \frac{1 - \alpha}{2} \left\{ \cos k_1 \Delta x + \cos k_2 \Delta y \right\} \text{ ist.}$$

Die Eigenwerte werden durch die Ausgleicheung selektiv verkleinert, und zwar umsomehr, je kleiner die Wellenlänge ist. Da die $|\lambda_i^n|$ den „Betrag“ der G^n repräsentieren, kann man nach 5) folgern, dass Wellen für die $|\lambda_i| < 1$ gilt, gedämpft werden (Reibung). Sind alle $|\lambda_i| = 1$, so schreiten die Wellen ungedämpft fort, und sind alle $|\lambda_i| > 1$, so wächst die Amplitude der Wellen mit der Zeit an (Instabilität). Für die kleinstmögliche Wellenlänge im Gitternetz $L = 2\Delta s$ wird $\mu = 1 - 2\alpha$. Wellen oder Störungen dieser Grössenordnung können also durch die Ausgleicheung stark gedämpft werden.

Natürlich lassen sich auch noch andere Ausgleichsverfahren mit Erfolg anwenden, wie es auch im Zuge dieser Arbeit teilweise geschehen ist. So künstlich diese Art und Weise, die Stabilität zu vergrössern, erscheint, so ändert die Ausgleicheung nichts an der Tatsache, dass die mit ihr behaftete Differenzengleichung eine Annäherung an die Differentialgleichung bleibt, da im Grenzübergang die Ausgleicheung verschwindet. Auch eine Vergrösserung der linearen Reibung würde die Stabilität vergrössern, dabei aber alle Wellenlängen ungefähr gleich stark dämpfen, und es besteht die Gefahr, dass die Lösung nicht mehr den physikalischen Gegebenheiten entspricht; ausserdem verschwindet diese Art Reibung nicht im Grenzübergang.

Eine etwas physikalischere Methode der Ausgleicheung besteht darin, in 1) Austauschglieder der Form $A_H \nabla^2 U$, $A_H \nabla^2 V$ einzuführen. Die Wirkung auf das Differenzensystem ist von der gleichen Art, wie die der Ausgleicheung, nur der physikalische Hintergrund ist etwas verändert.

IV. Praktische Untersuchungen über die Stabilität der Differenzengleichungen

Die Theorie, wie sie im vorigen Kapitel beschrieben wurde, lässt sich nur für lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten durchführen. Man kann jedoch hoffen, dass die Stabilität auch im Falle nichtkonstanter Koeffizienten und nichtkonstanter äusserer Kräfte erhalten bleibt, besonders, wenn ein Ausgleichsverfahren eingeführt wird. Diese Hoffnung erwies sich zumindest für die praktisch durchgeführten Berechnungen von Gezeitschwingungen und Windstau in Becken veränderlicher Tiefe als begründet. Auch bei Hinzunahme advektiver Glieder von der

Form $U \frac{\partial U}{\partial x} \frac{1}{h} + V \frac{\partial U}{\partial y} \frac{1}{h}$ u. s. w. wurde die rechnerische Stabilität nicht beeinflusst, jedoch bewirkten diese Glieder eine derart geringe Änderung der Resultate, so dass sie im allgemeinen — um Rechenzeit zu sparen — fortgelassen wurden.

Um zu zeigen, wie sich die numerischen Lösungen für das gleiche mathematische Problem, jedoch für verschieden gewählte Parameter Δs , Δt , und α verhalten, wurde in Abb. 1 der zeitliche Verlauf des Windstaus an zwei Gitterpunkten aufgetragen. Das zugrundegelegte Gebiet umfasste 110 bzw. 399 Gitterpunkte und hatte annähernd die Form

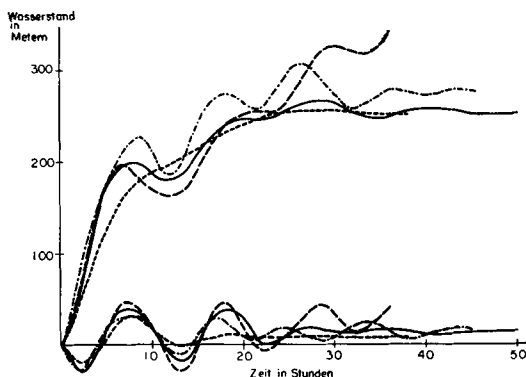


Abb. 1. Berechneter zeitlicher Verlauf des windbedingten Wasserstandes an zwei Punkten der Nordsee bei einem konstanten Wind von 20 m/sec aus 280° relativ zur Nordrichtung.

Ausgezogen:	$\Delta t = 20$ min	$\Delta s = 74$ km	$\alpha = 7/8$
Gestrichelt:	$\Delta t = 20$ min	$\Delta s = 74$ km	$\alpha = 1$
Punktiert:	$\Delta t = 20$ min	$\Delta s = 74$ km	$\alpha = 0$
Strichpunktiert:	$\Delta t = 10$ min	$\Delta s = 37$ km	$\alpha = 7/8$

und Tiefenverteilung der Nordsee. Im einzelnen wurden gesetzt (wenn nicht anders vermerkt, handelt es sich um c.g.s.-Einheiten): $\tau_x = 11,15$, $\tau_y = -6,41$ — das entspricht mit $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-6}$ einem Wind von 20 m/sec aus 300° relativ zum Gitternetz, bzw. 280° relativ zur Nordrichtung —, $r = 2,5 \cdot 10^2/h^2$, $f = 1,2 \cdot 10^{-4}$, $\Delta s = 74 \cdot 10^5$ bzw. $37 \cdot 10^5$, $\Delta t = 1,2 \cdot 10^3$ bzw. $0,6 \cdot 10^3$, $\alpha = 1, 7/8, 0$.

Die oberen Kurven entsprechen ungefähr der Elbemündung, für die die höchsten Wasserstände des gesamten Feldes erhalten wurden, die unteren der südschottischen Küste. Die Punkte sind in der Abb. 3a, aus der man auch nähere Einzelheiten des Gitternetzes ersieht, durch ausgefüllte Kreise gekennzeichnet. Die gestrichelten Kurven wurden ohne Ausgleichung ($\alpha = 1$) mit $\Delta s = 74$ km, $\Delta t = 20$ min erhalten. Augenscheinlich bleibt für diesen Fall die Lösung nicht stabil, sondern wächst mit fortschreitender Zeit an, ein stationärer Zustand wird nicht erreicht, was auch nicht im Widerspruch zu den Ergebnissen des vorigen Kapitels steht, da 19) nicht immer erfüllt war. Wendet man hingegen eine „schwache“ Ausgleichung ($\alpha = 7/8$) unter sonst gleichen Bedingungen an, so strebt die Lösung gegen einen stationären Zustand, der nach ungefähr 40 Stunden erreicht wird (ausgezogene Kurven). Die „starke“ Ausgleichung ($\alpha = 0$) wirkt wie eine starke Reibung, die Schwingungen sind gedämpft, und der stationäre Zustand, der praktisch derselbe ist wie bei der „schwachen“ Ausgleichung, wird früher erreicht (punktierte Kurven). Die Perioden, die zeitliche Lage der Maxima und Minima sind in diesen drei Fällen ungefähr gleich.

Wiederholt man die Rechnung mit „schwacher“ Ausgleichung, wählt jedoch ein feineres Gitternetz ($\Delta s = 37$ km, $\Delta t = 10$ min), so erhält man die strichpunktierten Kurven als „besseres“ Ergebnis. Die Tiefenwerte für die neu hinzugenommenen Punkte wurden aus den alten linear interpoliert. Dieses Resultat unterscheidet sich ein wenig von dem vorher mit $\Delta s = 74$ km erhaltenen, insbesondere solange der stationäre Zustand nicht erreicht ist: die Schwingungen sind z.T. ausgeprägter und weisen eine Phasenverschiebung auf, auch das Mittelniveau liegt bei dem einen Punkt etwas höher.

Für den stationären Zustand ergeben sich

für alle hier behandelten Fälle, soweit es sich um den Wasserstand handelt, fast gleiche Lösungen, hingegen traten bei den Durchflussmengen grössere quantitative Unterschiede auf. Die auftretenden Schwingungen rühren hauptsächlich von Querschwingungen der Nordsee her.

Man kann also folgern, dass für die numerische Errechnung nichtstationärer Zustände die Wahl eines möglichst engen Gitternetzes für die Güte der Resultate sehr wichtig ist, besonders wahrscheinlich wenn die Koeffizienten nicht konstant sind.

Um wenigstens einen Anhalt zu bekommen, wie gut die Annäherung ist, wurden einige Fälle durchgerechnet, für die sich wenigstens teilweise eine analytische Lösung angeben liess.

Vorausgesetzt sei ein Bassin konstanter Tiefe $h=50$ m, mit den Seitenlängen $a=666$ km in der x -Richtung, $b=888$ km in der y -Richtung. Das Becken sei offen auf der Linie $y=b$. Ein konstanter Wind wirke vom offenen Rande her in Längsrichtung des Beckens. Die Rand- und Anfangsbedingungen sind: $U=V=\zeta=0$ für $t=0$, $U=0$ für $x=0$ und $x=a$, $V=0$ für $y=0$, $\zeta=0$ für $y=b$.

Mit verschwindender Corioliskraft, also mit $f=0$ und $\tau_x=0$ erhält man so folgende Lösung für den Wasserstand:

$$24) \quad \zeta = \frac{2\tau_y}{b} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos l_n y}{\sqrt{ghl_n^2 - r^2/4}} \int_0^t e^{-\frac{r}{2}\alpha} \cdot \sin \sqrt{ghl_n^2 - r^2/4} \alpha d\alpha; \quad l_n = \frac{2n+1}{2} \frac{\pi}{b}$$

Für die Punkte $y=0$ und mit $\frac{\pi^2}{b^2} gh \ll r^2$ geht dieser Ausdruck über in:

$$25) \quad \zeta_{y=0} = \frac{2\tau_y}{b} \int_0^t e^{-\frac{r}{2}\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin l_n \sqrt{gh}\alpha}{l_n \sqrt{gh}} d\alpha$$

und

$$26) \quad \zeta_{y=0, t \rightarrow \infty} = -\frac{2\tau_y}{gh} \cdot b; \quad U_{t \rightarrow \infty} = V_{t \rightarrow \infty} = 0$$

als „stationäre“ Lösung.

Für die numerische Rechnung wurden folgende Daten gewählt: $\tau_x=0$, $\tau_y=-12,8$, $r=10^{-5}$, $f=0$, $\alpha=7/8$, $\Delta s=74 \cdot 10^5$, $\Delta t=2,7 \cdot 10^3$ Tellus XI (1959), 1

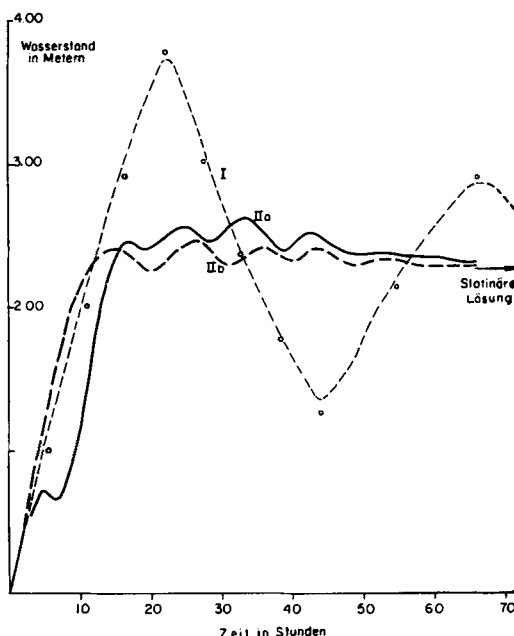


Abb. 2. Windbedingter Wasserstand in einem rechteckigen Becken konstanter Tiefe bei einem in Längsrichtung des Beckens wehenden Wind von 20 m/sec. Kurve I: Zeitlicher Verlauf des Wasserstandes für die Punkte $y=0$ nach numerischer Rechnung mit $f=0$; $\circ$ exakte Lösung.

Kurve II: Zeitlicher Verlauf des Wasserstandes für die Punkte a) $(x,y)=(a,0)$ und b) $(x,y)=(0,0)$ mit $f=1,2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$.

(c.g.s.-Einheiten). Ausserdem wurde für die Eckpunkte gesetzt: $U=V=0$ für $(x,y)=(0,0)$ und $(x,y)=(a,0)$, $U=\zeta=0$ für $(x,y)=(0,b)$ und $(x,y)=(a,b)$.

Das Ergebnis der analytischen und numerischen Rechnung für die Punkte $y=0$ ist in Abb. 2, Kurve I aufgetragen und zeigt, dass recht gute Uebereinstimmung herrscht. Die Ausgleichung wäre für diesen Fall mit verschwindender Corioliskraft nach den Ergebnissen des vorigen Kapitels nicht notwendig gewesen. Ebenfalls numerisch bestimmt wurde die Lösung mit $f=1,2 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ unter sonst gleichen Bedingungen wie vorher. Für den genannten Zeitschritt $\Delta t=2,7 \cdot 10^3 \text{ sec}$ traten jedoch im Verlauf der Rechnung so starke Störungen auf, dass sie abgebrochen werden musste. Das Kriterium 17) ist zwar erfüllt, nicht aber 19), welches ohne Ausgleichung einen Zeitschritt von ungefähr 10^3 sec fordert; mit Ausgleichung kann das Δt ein wenig grösser gewählt

werden. In der Tat wurde mit einem Zeitschritt von $\Delta t = 1,2 \cdot 10^3$ sec ein zufriedenstellendes Ergebnis erhalten. Die Abb. 2, Kurve IIa und IIb zeigt für die beiden Punkte $(x, y) = (0, 0)$ und $(x, y) = (a, 0)$ den zeitlichen Verlauf des Wasserstandes. Während im Beispiel mit $f=0$ ausgeprägte Längsschwingungen des Beckens mit grosser Amplitude auftraten und überhaupt keine Querschwingungen vorhanden sind, treten jetzt die Längsschwingungen vollkommen in den Hintergrund und nur Querschwingungen mit verhältnismässig kleiner Amplitude und ca. 10-stündiger Periode sind zu erkennen.

Bemerkt soll werden, dass an dem Punkt $(x, y) = (a, b)$, in dem $U=0$ und $\xi=0$ vorgeschrieben waren, nach $n\Delta t = 15$ Stunden unvernünftig hohe Stromgeschwindigkeiten von maximal 3 m/sec auftraten, die jedoch im weiteren Verlauf der Rechnung stetig abnahmen. Wahrscheinlich trägt die zweifache Bedingung, die diesem Punkt auferlegt war, die Schuld an diesem Verhalten, obwohl an den anderen Eckpunkten keine derartigen Fehler auftraten. Dieser Fall ist übrigens der einzige, bei dem solche Singularitäten bemerkt wurden; sie erschienen z. B. nicht in einer ähnlich angelegten Berechnung des Windstaus in einem allseitig geschlossenen Becken konstanter Tiefe. Auf der anderen Seite kann die Störung, die von diesem einen Punkt ausging, keinen grossen Einfluss auf das gesamte Feld ausüben.

Leider konnte die zeitbedingte analytische Lösung nicht ausgerechnet werden, jedoch ist die stationäre Lösung für diesen speziellen Fall sehr leicht erhältlich; sie ist die gleiche wie in dem vorangegangenen Beispiel mit $f=0$ (siehe 26). Aus der Abb. 2 erkennt man, dass die stationäre Lösung recht gut angenähert wird, was auch recht deutlich bei den Geschwindigkeitskomponenten in Erscheinung trat, die nach 60 Stunden nur noch sehr minimale Beträge aufwiesen. Ebenfalls sehr gut angenähert wurde die stationäre Lösung für den schon erwähnten Fall eines allseitig geschlossenen Beckens konstanter Tiefe; auch hier war die zeitbedingte analytische Lösung nicht bekannt.

V. Einige Ergebnisse der Windstauraechnung

Von grosser praktischer Bedeutung ist die Ermittlung der Wasserstände an den Küsten, wie sie durch ein vorgegebenes Windfeld

erzeugt werden. Mit Hilfe der numerischen Lösung der hydrodynamischen Differentialgleichungen könnten vielleicht einmal die bislang angewandten statistischen Methoden zur Vorhersage des Windstaus durch physikalisch besser fundierte abgelöst werden. Ein erster Schritt in diese Richtung ist von HANSEN (1956) unternommen worden, der nachträglich die durch den Hollandorkan im Winter 1953 hervorgerufenen Wasserstände unter Zugrundelegung der hydrodynamischen Gleichungen ausrechnete.

Dieser Fall „Holland-Orkan“ wurde mit den in Kapitel II beschriebenen Methoden einer nochmaligen Prüfung unterzogen und mit den von Hansen erhaltenen Ergebnissen verglichen. Da die Resultate sich nicht wesentlich unterscheiden, wird hier auf eine Darstellung der Wasserstandskurven verzichtet.

Um Beobachtung und Rechnung in Einklang zu bringen, musste die Windschubkonstante γ , die allgemein zu $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-6}$ angenommen wird, halbiert werden. Eine Aufrauhung der Wasserstände, wie sie bei den von Hansen veröffentlichten Kurven zu erkennen ist, trat nicht auf. Dieses liegt wahrscheinlich an der Tatsache, dass eine Ausgleichung ($\alpha = 7/8$) vorgenommen wurde und auch, dass die nach jeweils 3 Stunden gegebenen Windwerte für jeden Zeitschritt automatisch interpoliert wurden.

Die auftretenden Differenzen zwischen Beobachtung und Rechnung beruhen zum grossen Teil auf den ungenauen Windangaben, denn die Uebereinstimmung zwischen den an einigen Orten gemessenen Winden und den zyklotropisch berechneten war vielfach recht mässig. Leider lässt sich auf diesem Gebiete kaum eine Verbesserung durchführen. Der benutzte Gitterabstand ($\Delta s = 74$ km) — das Gitternetz ist das gleiche wie auf der folgenden Abb. 3 — könnte jedoch noch verkleinert werden, um die Küstenstruktur und Tiefenverteilung besser zu erfassen und die Lösung zu verbessern.

Um die Einwirkung von Windfeldern auf die Wasserstände besser überblicken zu können, wurden noch zwei Fälle durchgerechnet, bei denen die Wassermassen der Nordsee unter dem Einfluss einer zeitlich und örtlich konstanten Windschubkraft standen. Ein Beispiel, das den zeitlichen Verlauf des Wasserstandes an zwei Punkten unter Einwirkung

eines konstanten Windfeldes aus 280° relativ zur Nordrichtung und 20 m/sec Stärke zeigt, wurde bereits im Kapitel IV, Abb. 1 aufgeführt. Im Zusammenhang damit wurde darauf hingewiesen, dass die Lösung für die Wasserstände im stationären Fall ziemlich unabhängig von der gewählten Ausgleichung und dem gewählten Gitterabstand war.

Der folgenden Abb. 3a, die das Verhalten des gesamten stationären Feldes zeigt, liegen die Werte $\alpha=7/8$, $\Delta s=74 \text{ km}$, $\Delta t=20 \text{ min}$ zugrunde. In Bezug auf die Wasserstände ist diese Darstellung fast die gleiche für $\alpha=0$, $\Delta s=74 \text{ km}$, $\Delta t=20 \text{ min}$ und für $\alpha=7/8$, $\Delta s=37 \text{ km}$, $\Delta t=10 \text{ min}$. Die Durchflussmengen würden jedoch nur qualitativ gleiche Bilder ergeben, insbesondere in der Nähe der Ränder treten grössere Unterschiede auf. Die Küsten der Nordsee sind durch gerade Linienzüge angenähert worden; der Englische Kanal ist geschlossen, ebenso das Skagerrak. Für den nördlichen offenen Rand wurde $\xi=0$ für alle Zeiten, für die übrigen festen Ränder $U=0$ oder $V=0$ vorgeschrieben.

Im einzelnen sieht man, dass das Wasser auf der westlichen Seite der Nordsee einströmt, im Inneren einen zyklonal geformten Wirbel

bildet und auf der sehr viel tieferen östlichen Seite wieder ausströmt; dabei ist die Einflusskomponente des Wassertransports ebenso gross wie die Ausflusskomponente. Die Art der Wasserbewegung ist ausser vom Wind von der Tiefenverteilung abhängig.

Einen ähnlich gelagerten Fall, nur mit dem Unterschied, dass ein konstanter Wind aus 30° angenommen wurde, zeigt die Abb. 3b. Hier weisen die Wasserbewegungen kleinere Beträge auf als im vorigen Beispiel und sind nicht so klar gegliedert, auch die Wasserstände sind geringer.

Aus diesen beiden Fällen lassen sich wegen der Linearität der Gleichungen durch Ueberlagerung Lösungen für beliebige konstante Windfelder erzielen. Seien u_L und v_L die Windkomponenten, dann gilt für jeden Punkt i, k des Gitternetzes, dass der Windstau gegeben ist durch: $\zeta_{i,k} = a_{i,k} u_L + b_{i,k} v_L$ (statt der Windkomponenten könnten auch die Komponenten des Windschubes mit verändertem $a_{i,k}$ und $b_{i,k}$ genommen werden). Die für jeden Punkt konstanten $a_{i,k}$ und $b_{i,k}$ lassen sich bestimmen, wenn mindestens zwei unabhängige Lösungen vorhanden sind. Hieraus lassen sich weiter die bei einer konstanten Windstärke

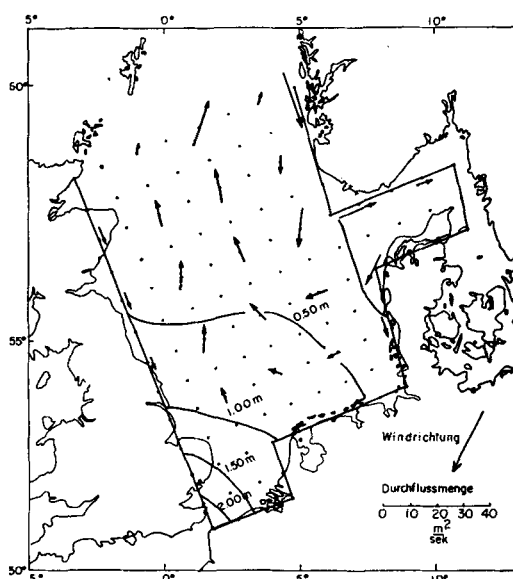
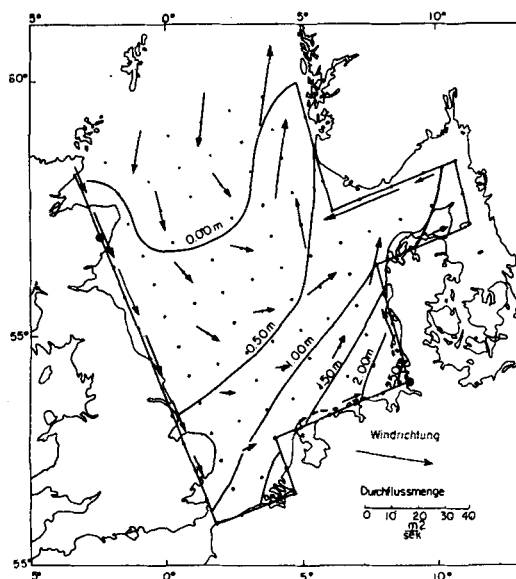


Abb. 3 a und 3 b. Errechneter Wasserstand und Wassertransport in der Nordsee im stationären Zustand unter der Einwirkung eines zeitlich und örtlich konstanten Windfeldes mit einer Windstärke von 20 m/sec aus a) 290° und b) 30° relativ zur Nordrichtung.

$|w_L|$ auftretenden grösstmöglichen Wasserstände $\zeta^{\max}$, sowie die Windrichtung φ_0 , für die dieser maximale Windstau auftritt, errechnen. Dabei ist:

$$\zeta^{\max} = |w_L| \sqrt{a_{i,k}^2 + b_{i,k}^2}; \quad \operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{a_{i,k}}{b_{i,k}}$$

Die Bestimmung dieser Grössen ist aus den beiden beschriebenen Beispielen für die Nordsee durchgeführt worden, und die Linien $\zeta^{\max} = \text{const}$ und $\varphi_0 = \text{const}$ sind in die Abb. 4 eingezeichnet worden. Nimmt man z. B. die Elbemündung: Der höchste Windstau tritt nach der Rechnung bei einer Windrichtung aus 305° auf und beträgt 2,80 m (mit der Windschubkonstante $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-6}$). Für die englische Küste würde ein Wind aus 350° die höchsten Wasserstände bringen. Da der Englische Kanal in dem behandelten Modell geschlossen ist, treten hier sehr hohe Windstauwerte auf, die natürlich in Wirklichkeit nicht beobachtet werden könnten. Es sei darauf hingewiesen, dass für den Windschub die Form: $\tau_x = \gamma w_L |w_L|$; $\tau_y = \gamma v_L |w_L|$ mit $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-6}$ den Rechnungen zugrunde liegt. Verkleinert oder vergrössert man γ um einen Faktor, so wird auch die Lösung um denselben Faktor verkleinert oder vergrössert. Das gibt die Möglichkeit, nachträglich aus dem Vergleich zwischen beobachtetem und berechnetem Wasserstand eine verbesserte Windschubkonstante einzuführen.

Vom Deutschen Hydrographischen Institut in Hamburg wurden freundlicherweise einige auf statistischer Grundlage gewonnene Windstauwerte für die deutsche Nordseeküste zur Verfügung gestellt. Die Windrichtung, für die an der deutschen Küste bei einer konstanten Windstärke maximaler Windstau eintritt, stimmt gut mit den errechneten Werten überein. Dasselbe gilt für die holländische Küste, an der nach SCHALKWIJK (1947) bei NW bis NNW Wind maximaler Stau auftritt.

Die bei einer Windstärke von 20 m/sec auftretenden Stauhöhen selbst sind jedoch geringer als die mit $\gamma = 3,2 \cdot 10^{-6}$ errechneten. Uebereinstimmende Werte werden erst mit einem um den Faktor 0,6 bis 0,7 verkleinerten γ erhalten. Diese Diskrepanz mag darin ihre Ursache haben, dass das statistische Verfahren nur das Windfeld in der Deutschen Bucht zugrunde legt und auch, dass der stationäre

Zustand in Wirklichkeit noch nicht erreicht war. Eine Rechnung, in der der Wind (280° , 20 m/sec) nur in der „unteren“ Hälfte der Nordsee vorgeschrieben wurde, genau gesagt in allen den Punkten, die mehr als $5\Delta s$ ($\Delta s = 74$ km) vom nördlichen offenen Rande entfernt lagen, ergab für die deutsche Nordseeküste im Mittel um den Faktor 0,66 niedrigere Stauwerte, als bei demselben über der ganzen Nordsee wehenden Wind.

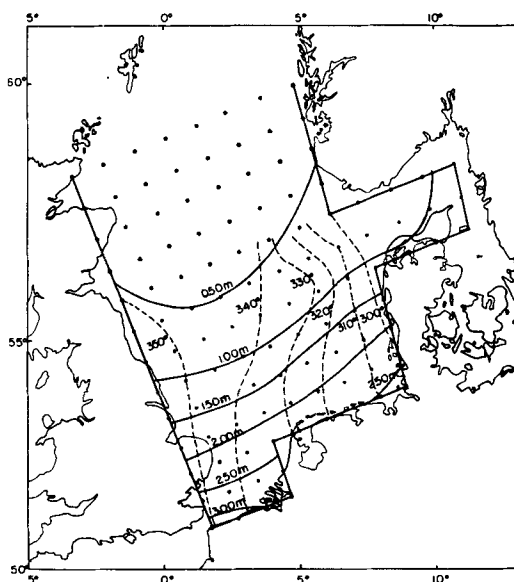


Abb. 4. Grösstmöglicher Windstau in der Nordsee — und Windrichtung für die dieser eintritt - - - bei einer konstanten Windstärke von 20 m/sec im stationären Zustand. (Windrichtung 0° = Nordwind)

Die Aufgabe der angeführten Beispiele war vor allem, zu zeigen, dass eine Bestimmung des Windstaus aus den gegebenen Gleichungen möglich ist. Ob die guten Ergebnisse (TOMCZAK 1955), die mit dem statistischen Verfahren in der Praxis erreicht wurden und werden, auch von dem hier beschriebenen physikalischen Verfahren erreicht werden, lässt noch nicht sagen. Dazu müssten umfangreichere Prüfungen vorgenommen werden. Das hier zumeist benutzte Gitternetz mit $\Delta s = 74$ km sollte zur Erreichung möglichst guter Ergebnisse durch ein engmaschigeres ersetzt werden, vor allem, um auch den Einfluss des Wattenmeeres zu erfassen.

VI. Einige Ergebnisse der Gezeitenrechnung

Beobachtungen von Gezeitenwellen und Gezeitenströmen liegen, ausser an den Küsten, meistens nur in sehr beschränktem Umfange vor. Um auch für das Innere eines Beckens verlässliche Angaben zu erhalten, hat man bislang auf ein Randwertverfahren zurückgegriffen. Dem liegen ebenfalls die Gleichungen 1) zugrunde, wobei durch einen perio-

dischen Ansatz der Form
$$\begin{pmatrix} U \\ V \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{U} \\ \tilde{V} \\ \tilde{\zeta} \end{pmatrix} e^{\pm \frac{2\pi i}{T} t}$$

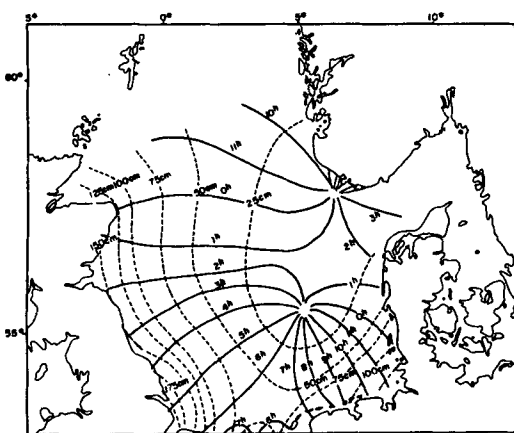


Abb. 5. M_2 Tide der Nordsee nach W. Hansen. Linien gleicher Amplitude ---- und Eintrittszeit des Hochwassers in Mondstunden — bezogen auf den Durchgang des Mondes durch den 0-Meridian.

mit T als Gezeitenperiode die Zeitableitung eliminiert wird. Die so erhaltenen elliptischen Gleichungen lassen sich im Prinzip für das Innere eines Gebietes lösen, wenn $\tilde{\zeta}$ oder die Normalkomponente des Gezeitenstroms auf allen das Gebiet umgebenden Rändern bekannt ist. Die praktische Lösung hat meistens durch ein Iterationsverfahren oder ein sonstiges numerisches Verfahren zu erfolgen.

Anstelle dieses Randwertverfahrens kann man sich direkt der Gleichungen 1) unter Beibehaltung der Zeitableitung bedienen und die physikalischen Randbedingungen, dass das Wasser an den Küsten nur längs der Küsten fließen darf, benutzen. Bei Randmeeren, in denen die Gezeiten als Mitschwingungsge-

zeiten auftreten, ist die Welle selbst oder die Stromkomponenten nur an den zum offenen Ozean gelegenen Rändern vorzuschreiben. Ein weiterer Vorteil dieses Verfahrens ist, dass die vorzuschreibende Welle keine Sinuswelle zu sein braucht, sondern direkt den Beobachtungen, soweit solche vorliegen, entnommen werden kann.

Das System 1) direkt zur Lösung eines allgemeinen Gezeitenproblems anzuwenden, ist ohne die elektronischen Rechenmaschinen kaum möglich, da der Rechenaufwand noch grösser ist als bei dem Randwertverfahren. Im Prinzip geht die Rechnung so vor sich, dass mit einem beliebig vorgegebenen Anfangsfeld und den vorgeschriebenen Randbedingungen solange gerechnet wird, bis die Gezeitenwelle stationär bleibt, d. h. bis die Felder nach jeweils einer Periode übereinstimmen.

Den einzig bekannten Versuch, Gezeiten-schwingungen eines rechteckigen Beckens von der Grössenordnung und Tiefenverteilung der Nordsee mit Hilfe der zeitabhängigen Gleichungen 1) numerisch zu berechnen, unternahm HANSEN (1956). Das Ergebnis war jedoch nicht ganz zufriedenstellend, nähere Einzelheiten sind nicht veröffentlicht worden.

Die Frage ist nun, ob das hier beschriebene Differenzensystem 2) besser geeignet ist, die Gezeitenvorgänge zu beschreiben. Dieses soll im folgenden näher untersucht werden.

Die Gezeiten der Nordsee sind seit längerem gut bekannt. Die neueste und umfangreichste Darstellung der in der Nordsee vorherrschenden M_2 Tide stammt von HANSEN (1952). Durch Kombination der in grösserer Anzahl vorliegenden Gezeitenstrommessungen in der freien Nordsee und des kurz erwähnten Randwertverfahrens, wobei also die Welle auf allen Rändern vorgeschrieben wurde, erhielt Hansen ein sehr verlässliches Bild der durch Gezeiten bedingten Wasserstände und Strömungen.

Zuerst sei ein Blick auf die Abb. 5 geworfen, die der eben erwähnten Arbeit entnommen wurde und die die Linien gleicher Eintrittszeit des Hochwassers und die Amplitude der M_2 Tide darstellt. Danach läuft die halbtägige Gezeitenwelle längs der englischen Küste herunter, biegt im südlichen Teil der Nordsee nach Osten ein und umrundet in der südöstlichen Nordsee einen Drehpunkt, eine so-

nannte Amphidromie. Eine weitere sehr schwach ausgebildete Amphidromie befindet sich noch vor der norwegischen Küste. Die Frage nach der Entstehung solcher Drehpunkte ist ausführlich in der Literatur behandelt.

Für die Rechnung wurde die Gezeitenwelle am nördlichen offenen Rande vorgeschrieben und den einzelnen Randpunkten zugeordnet. Die auf Beobachtungen beruhenden Informationen sind hier also wesentlich geringer als bei dem Randwertverfahren, dem die Abb. 5 zugrunde liegt. Das Gitternetz ist vorerst das gleiche wie bei den schon besprochenen Windstaurechnungen, der Englische Kanal ist geschlossen, ebenso das Skagerrak. Die M_2 Tide

in Bezug auf Stabilität auch zur Berechnung von Gezeitschwingungen brauchbar ist. Auf der anderen Seite treten aber so grosse Abweichungen gegen die zu erwartenden Verhältnisse auf, das dieses Ergebnis praktisch nicht zu verwerten ist. Die Amphidromie in der südöstlichen Nordsee ist weit nach Osten gerückt und liegt vor der dänischen Küste; ebenfalls schlecht getroffen sind die Eintrittszeiten und Amplituden des Hochwassers.

Diese Abweichungen können viele Ursachen haben, sie können liegen in der primär vorgeschriebenen Welle am nördlichen Rande, die nur durch eine Interpolation von Küste zu Küste bekannt ist, ferner in der durch das

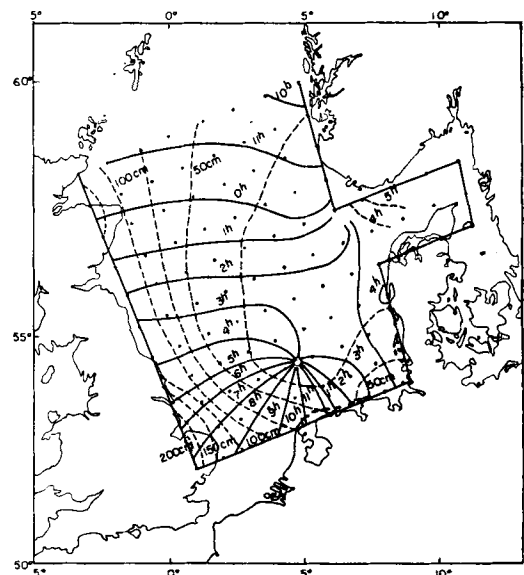
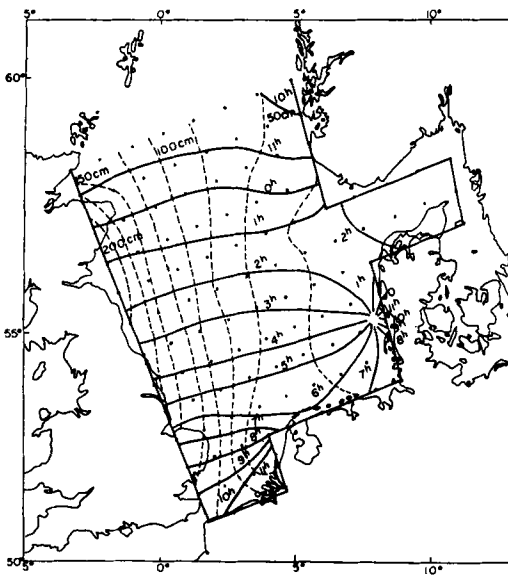


Abb. 6 a und 6 b. Berechnete M_2 Tide der Nordsee. a) Englischer Kanal geschlossen. b) Hoofden geschlossen. Bezeichnungen wie in Abb. 5.

hat eine Periode von $T=12,24$ Stunden; als Zeitschritt wurde $\Delta t=T/36$ genommen, und der Faktor für die Ausgleichung wurde zu $\alpha=7/8$ gewählt.

Nach einer Rechenzeit von mehreren Perioden blieb die Welle stationär, d. h. die ζ -Werte unterschieden sich nach jeweils einer Periode nur noch um höchstens 2 cm; die erhaltene Lösung war wieder eine reine Sinuswelle der Periode T . Die errechneten Eintrittszeiten des Hochwassers und die Amplituden sind in der Abb. 6a zu sehen. Das Resultat zeigt, dass das Differenzenverfahren 2)

Gitternetz angenäherten Tiefenverteilung und Küstenstruktur, in dem Reibungsansatz und natürlich auch im Differenzenverfahren selbst.

Zur näheren Untersuchung der Gründe, die zu diesem fehlerhaften Ergebnis geführt haben, wurden für den nächsten Versuch zwei Änderungen vorgenommen: Die Hoofden bleiben ausgeschlossen, und die primäre Welle am nördlichen Rande wurde so angesetzt, dass sie möglichst genau mit derjenigen aus der Abb. 5 übereinstimmte.

Was bei dieser Rechnung herauskam, zeigt die Abb. 6b. Eine gewisse Verbesserung ist

nicht von der Hand zu weisen. War die Amphidromie in dem vorigen Resultat zu weit nach Osten gerückt, liegt sie jetzt zu weit nach Südwesten verschoben. Immerhin kann man nicht behaupten, dass das Ergebnis praktisch brauchbar wäre, es zeigt jedoch, wie empfindlich das System gegenüber Änderungen einzelner Parameter ist. Vor allen Dingen scheint sehr wesentlich der Aufbau der südlichen Nordsee in das Resultat einzugehen. Es ist auch verständlich, dass man kein allgemein zufriedenstellendes Ergebnis ohne Berücksichtigung der durch den Englischen Kanal

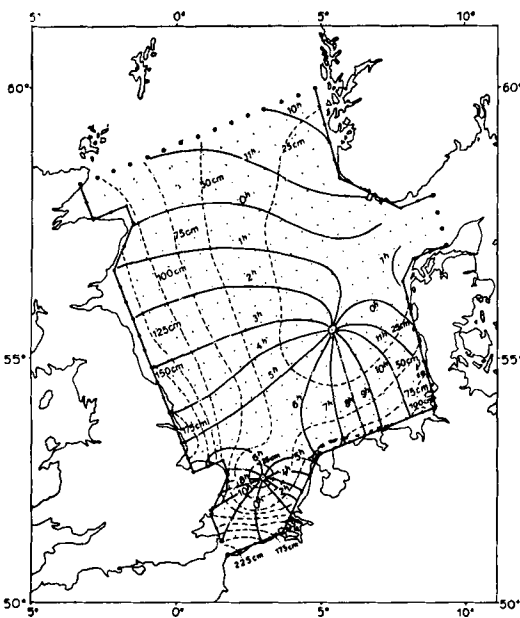


Abb. 7. Berechnete M_2 Tide der Nordsee mit verfeinertem Gitternetz und Einbeziehung der Doverstrasse. Bezeichnungen wie in Abb. 5.

eindringenden Gezeitenwelle erwarten kann. Auf der anderen Seite ist das benutzte Gitternetz sehr weitmaschig und nach den Ergebnissen des Kapitels IV kann man eine andere, höchstwahrscheinlich bessere Lösung für ein engmaschigeres Gitternetz erwarten. Letzteres bietet den weiteren Vorteil, dass sich ebenfalls die in der Doverstrasse auftretende und sehr gut bekannte Gezeitenwelle als Randbedingung aufstellen lässt. Ferner erlaubt ein engmaschigeres Gitternetz auch eine bessere Annäherung der Küstengestalt und Tiefenverteilung an die in der Natur vorkommende.

Für die folgende Rechnung wird daher der

Gitterabstand zu $\Delta s = 37$ km gewählt, und der Zeitschritt wird ebenfalls um die Hälfte auf $\Delta t = T/72$ verkleinert; die Rechenzeit vergrößerte sich dadurch ungefähr um das 6-fache und betrug für eine Periode (= 72 Zeitschritte) 30 Minuten. Die Doverstrasse wird jetzt durch zwei Punkte repräsentiert; die dort auftretende M_2 Tide wurde einer Arbeit von DOODSON und CORKAN (1931) entnommen und den beiden Punkten zugeordnet. Die im Norden vorgeschriebene Gezeitenwelle bleibt die gleiche wie im vorigen Beispiel. Im Skagerrak wird angenommen, dass sich der Wasserspiegel nicht ändert; wegen der dort auftretenden sehr geringen Wasserstandsschwankungen durch Gezeiten ist diese Bedingung ohne weiteres zu vertreten. Eine weitere Verbesserung wurde dadurch vorgenommen, dass auch die Möglichkeit, die Ränder 45° gegen das Koordinatensystem zu drehen, in die Rechnung einbeschlossen wurde.

Die Einzelheiten und das Ergebnis der mit 376 Punkten durchgeführten Rechnung sind in der Abb. 7 zu erkennen. Die Übereinstimmung mit der Abb. 5 ist jetzt wesentlich besser; die Amphidromien in der südöstlichen Nordsee liegen jetzt genau übereinander. Ebenfalls sehr gut getroffen ist die am Nordrande der Hoofden gelegene Amphidromie, was z. B. aus dem Gezeitenatlas des Deutschen Hydrographischen Instituts hervorgeht (siehe auch DOODSON und WARBURG, 1941. Vor der norwegischen Küste kann man nur andeutungsweise von dem Vorhandensein einer Amphidromie sprechen, da die Wasserstandsschwankungen von einigen Zentimetern nicht ausreichen, die Phase genau genug zu bestimmen. Alle anderen Werte sind jedoch durch die Rechnung ausgezeichnet fundiert. Die größten Abweichungen treten an der deutschen Küste auf, wo sich die Amplituden bis zu 25 cm und die Phasen um ungefähr eine Stunde von den aus den Beobachtungen abgeleiteten Werten unterscheiden.

Ausser den durch die Gezeiten hervorgerufenen Wasserstandsschwankungen gibt das benutzte Differenzensystem auch die Komponenten des Wassertransports U und V als Lösung. Aus ihnen sind die vertikal integrierten Geschwindigkeitskomponenten U/h und V/h bestimmt worden. Die errechnete Eintrittszeit und der Betrag und die Richtung der Grösstgeschwindigkeit des Gezeitenstroms sind

in die Abb. 8a und 8b eingezeichnet worden. Verglichen mit den von HANSEN (1952) publizierten Werten, die aus Strombeobachtungen stammen, ist die Uebereinstimmung ziemlich gut. Wie bei den Wasserstandsschwankungen befinden sich auch hier grossräumig gesehen die grössten Abweichungen in der Nähe des deutsch-dänischen Küstengebietes; die berechneten Geschwindigkeiten sind hier z. T. 50 % kleiner als die aus Beobachtungen abgeleiteten.

fahren selbst zu liegen, welches eben nur eine Näherungslösung gibt. Eine weitere Verbesserung der Ergebnisse könnte gewiss durch eine weitere Verengung des Gitternetzes erzielt werden. Vielleicht beruht auch ein Teil der Fehler auf der Tatsache, dass die am nördlichen Rande vorgeschriebene Gezeitenwelle etwas unsicher ist, da dort kaum Beobachtungen vorhanden sind, und man auf eine Interpolation von der schottischen zur norwegischen Küste angewiesen ist.

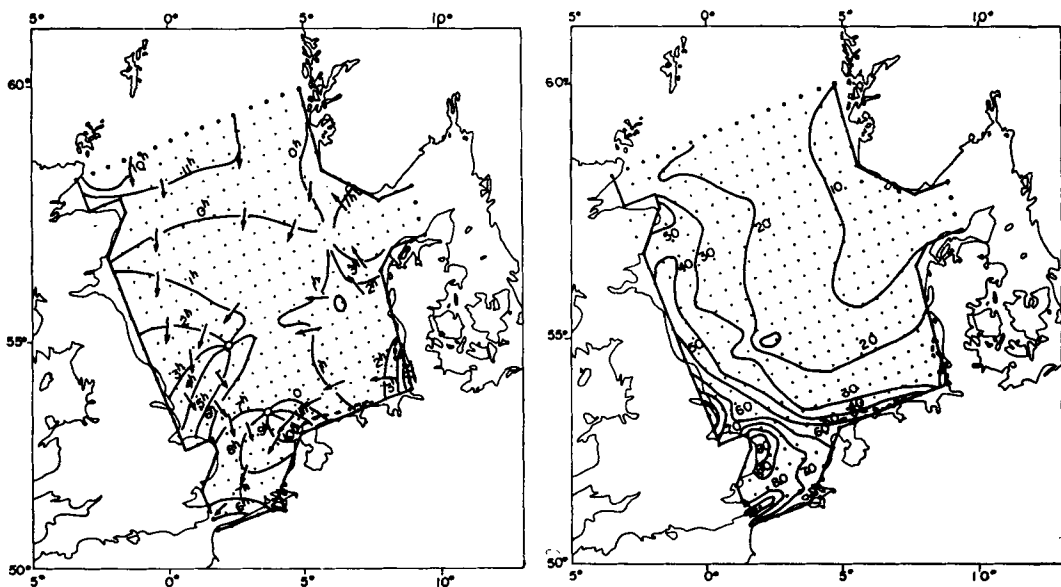


Abb. 8 a und 8 b. M_2 Tide der Nordsee. a) Berechnete Eintrittszeit der Maximalgeschwindigkeit des Gezeitenstroms in Mondstunden und Stromrichtung zu dieser Zeit. b) Berechneter Betrag der Maximalgeschwindigkeit des Gezeitenstroms in cm/sec.

Um den Einfluss der Reibung näher zu untersuchen, wurde die eben besprochene Rechnung unter der Annahme eines nichtlinearen

Reibungsgesetzes $\left(r = \frac{2,6 \cdot 10^{-3}}{h^2} \sqrt{U^2 + V^2} \right)$

und Hinzunahme der advektiven Glieder wiederholt. Gegenüber dem vorher erhaltenen Resultat treten jetzt in dem verhältnismässig flachen deutsch-dänischen Küstengebiet um 10 % bis 15 % höhere Amplituden der Gezeitenwelle und des Gezeitenstromes auf, und die Eintrittszeiten liegen um 10 bis 15 Minuten früher, welches eine geringfügige Verbesserung bedeutet.

Die Hauptursachen für die noch bestehenden Abweichungen scheinen in dem Ver-

Eine weitere Rechnung wurde noch unternommen, um zu erkunden, welcher Teil der in der Doverstrasse beobachteten Tide aus der Nordsee und welcher aus dem Englischen Kanal stammt. Dazu wurden die Gezeiten bestimmt, wie sie bei einer geschlossenen Doverstrasse auftreten würden; das Resultat¹ wurde dann von jenem mit geöffneter Doverstrasse abgezogen. Diese Differenz ergibt die aus dem Englischen Kanal eintretende Gezeitenwelle und ihre Ausbreitung in die Nordsee (Abb. 9). Gemäss dieser Rechnung kommt

¹ Es ähnelt sehr der Abb. 7 und nicht der Abb. 6 a, in welcher ebenfalls die Doverstrasse geschlossen war!

rund die Hälfte der in der Doverstrasse beobachteten M_2 Tide aus dem Englischen Kanal; ihre Wirkung auf die Gezeitenamplitude an der deutschen Küste beträgt in diesem Modell noch bis 40 %.

Zum Schluss sei noch das Resultat einer Gezeitenrechnung ohne Corioliskraft aufgeführt (Abb. 10). Die Bedingungen sind sonst die gleichen wie in dem Beispiel, welches zur Abb. 7 führte. Auch in dieser Rechnung tritt in der mittleren Nordsee eine Amphidromie auf, die sich fast an der gleichen

Reibung eine sehr wichtige Rolle spielt, falls Corioliskräfte auftreten.

Im Falle der hier durchgeführten Rechnungen ist der Reibungskoeffizient r als Funktion der Tiefe angesetzt worden und schwankt für die Nordsee zwischen den Werten 10^{-4} und $3 \cdot 10^{-7} \text{ sec}^{-1}$ gemäss den für das Gitternetz benutzten Tiefen zwischen 15 und 300 Metern. In diesen tiefen Teilen ist die Bedingung 19) für rechnerische Stabilität bei dem gewählten Zeitschritt von 20 min. nicht mehr erfüllt; trotzdem ergaben sich in der Praxis

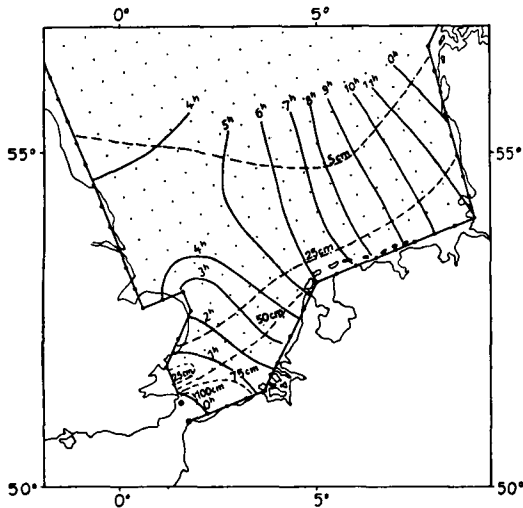


Abb. 9. Einfluss der durch den Englischen Kanal eintretenden Gezeitenwelle (Resultat Doverstrasse geöffnet minus Resultat Doverstrasse geschlossen). Sonstige Randbedingungen und Bezeichnungen wie in Abb. 7.

Stelle befindet, wie in der mit Corioliskraft durchgeführten Rechnung. In den Hoofden kommt es dagegen nur zur Ausbildung einer stehenden Welle. Ein bemerkenswerter Unterschied gegen das frühere Resultat ist, dass die Hubhöhen längs der englischen Küste geringer sind; als Kompensation treten in den östlichen Teilen der Nordsee höhere Hübe auf.

VII. Folgerungen

Einige Beispiele sind angeführt worden, die zeigen sollten, dass das benutzte Differenzensystem 2) sich sehr gut zur Errechnung hydrodynamischer Vorgänge in Flachwassergebieten eignet. In Flachwassergebieten deshalb, weil für die rechnerische Stabilität die

Tellus XI (1959), 1

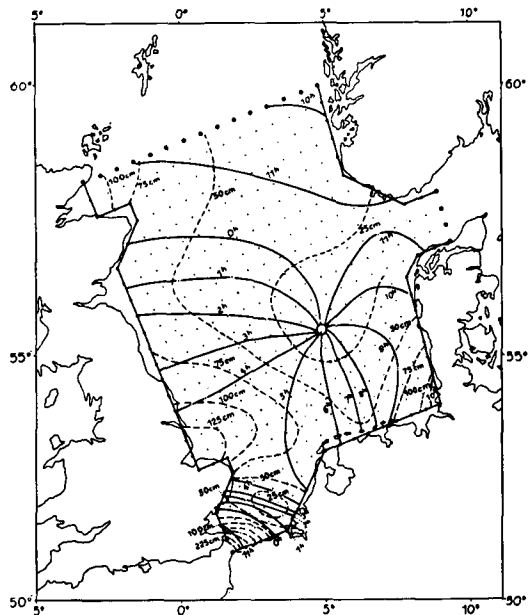


Abb. 10. M_2 Tide der Nordsee bei Vernachlässigung der Corioliskraft. Randbedingungen und Bezeichnungen wie in Abb. 7.

bei Anwendung eines Ausgleichsverfahrens stabile Lösungen. Das mag zu einem Teil an dem Ausgleichsverfahren liegen, zum anderen Teil daran, dass diese grossen Tiefen nur in einem verhältnismässig kleinen Gebiet vorkommen; als mittlere Tiefe der Nordsee sind ungefähr 70 m anzusetzen. Obwohl nicht praktisch erprobt, würde sehr wahrscheinlich bei einer gleichmässigen Tiefe von 300 m rechnerische Instabilität für den gewählten Zeitschritt eingetreten sein, auch mit Ausgleichung.

Damit ergeben sich nicht sehr günstige Perspektiven bei einer Anwendung des Ver-

fahrens auf Bewegungsvorgänge der Ozeane oder der Atmosphäre, da die Reibung sehr gering ist; man müsste also zu sehr kleinen Zeitschritten übergehen. Ob sich diese Schwierigkeiten durch ein anderes Differenzensystem beheben lassen, wäre wert untersucht zu werden. Man kann sich z. B. ein Verfahren denken, welches ebenfalls zentrierte Zeitdifferenzen für die vektoriellen Grössen benutzt, oder auch ein implizites System, welches durch Iterationen zu lösen wäre.

Immerhin sind die Anwendungsmöglichkeiten durch die wenigen hier angeführten Beispiele, die hauptsächlich einer Prüfung des Verfahrens dienen, nicht erschöpft. Weitere Durchrechnungen von Sturmfluten, die Er-

mittlung der Abhängigkeit des Wasserstandes von verschiedenen Windfeldern und eine eingehendere Analyse der Gezeitenschwingungen und Gezeitenströme wäre von grossem Nutzen; hierzu sollte nicht die M_2 Tide genommen werden, sondern die beobachtete nicht sinusförmige Gezeit.

Der Autor möchte Herrn Prof. Walter Hansen im Institut für Meereskunde in Hamburg und Herrn Dr. Pierre Welander im Internationalen Institut für Meteorologie in Stockholm, sowie Herrn Heinz Otto Kreiss an der Technischen Hochschule in Stockholm seinen besonderen Dank für die in vielen Diskussionen erhaltenen Anregungen aussprechen.

SCHRIFTTUM

- DOODSON, A. T., and CORKAN, R. H., 1931: The principal constituent of the tides in the English and Irish Channels. *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **231**.
- DOODSON, A. T., and WARBURG, H. D., 1941: *Admiralty Manual of Tides*, London.
- HANSEN, W., 1952: Gezeiten und Gezeitenströme der halbtägigen Hauptmondtide M_2 in der Nordsee. *Dtsch. Hydrogr. Z. Ergänzungsheft* **1**.
- HANSEN, W., 1956: Theorie zur Errechnung des Wasserstandes und der Strömungen in Randmeeren nebst Anwendungen. *Tellus* **8**, pp. 287–300.
- KREISS, H. O., 1958: Ueber die approximative Lösung von linearen partiellen Differentialgleichungen mit Hilfe von Differenzengleichungen. *Trans. Roy. Inst. Techn. Stockholm*, im Druck.
- LAX, P. D., and RICHTMYER, R. D., 1956: Survey of the stability of finite difference equations. *Comm. Pure Appl. Math.* Vol. **IX** Nr 2.
- SCHALKWIJK, W. F., 1947: A contribution of the study of storm surges on the Dutch coast. *Kon. Nederl. Meteorol. Inst. De Bilt* Nr **125**.
- TOMCZAK, G., 1955: Die Sturmfluten vom 20. bis 24. Dezember 1954 bei Cuxhaven. *Dtsch. Hydrogr. Z.* **8**, Heft 4.