

Zur Theorie des Wärmehaushaltes strahlungsdurchlässiger Medien

Von H. REUTER

Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik, Wien

(Manuscript received June 7, 1949)

Abstract

In view of the fact that large areas of the earth's surface are temporarily or permanently covered by a medium pervious to radiation, i.e. water, snow or ice, attention is directed to that special feature of the heat economy of these media having to do with radiation balance and heat transfer. Primarily, the purpose of the theory is to find an explanation for the observed distribution of temperature within these media. A first attempt to solve this problem was previously made by the author (REUTER 1948 a) in a study of the heat economy of snow cover. The essential basis of the present as well as the earlier treatment lies in the assumption that snow, ice and water, while pervious to insolation, are nevertheless impervious to outgoing radiation. The present paper treats only the simple case of constant incoming penetrating radiation and at the same time a constant effective outgoing radiation from the surface of the medium. One of the principal results is that the temperature maximum produced during the heating process does not appear at the surface, but rather at some depth below. Although the case of water is not treated in this report, the results obtained for ice may be applied, with slight modification, to the case of calm pure water in view of the use of the same coefficients of absorption for both water and ice.

Einleitung

Die qualitativen und quantitativen Unterschiede im Wärmehaushalt der verschiedenen die Erdoberfläche bildenden Medien stellen infolge ihrer verschiedenen Strahlungs- und Wärmeleitungseigenschaften einen Gegenstand erhöhten Interesses dar. Die Tatsache, dass weite Gebiete der Erdoberfläche dauernd oder zeitweise mit strahlungsdurchlässigen Medien (Wasser, Schnee, Eis) bedeckt sind, lenkt die Aufmerksamkeit auf die Unterschiede in der Theorie des Wärmehaushaltes strahlungsdurchlässiger Medien gegenüber strahlungsundurchlässigen. Es handelt sich hier vor allem um die folgende Frage: Wie kommt die beobachtete Temperaturverteilung im Schnee, Eis und Wasser zustande und inwieweit ist daran die Strahlungsdurchlässigkeit beteiligt? Im allgemeinen wurde in früheren Untersuchungen der Bedeutung der Strahlungsdurchlässigkeit für das Zustandekommen bestimmter Temperaturverteilungen nur geringe

Beachtung geschenkt. So verwendete man z. B. zur Berechnung der Wärmeleitfähigkeit im Schnee mit Hilfe der beobachteten Temperaturänderungen in den verschiedenen Tiefen die klassische Formel für die Verlagerung solcher Temperaturwellen von der Oberfläche zur Tiefe hin (siehe z. B. KERÄNEN 1929), und auch bei Wasser wurde die Temperaturwelle als von der Oberfläche ausgehend betrachtet (SCHMIDT, W., 1925). Bei allen diesen Problemen des Wärmehaushaltes müssen jedoch Theorie und Beobachtung Hand in Hand gehen, da in die theoretischen Formeln eine Reihe von Größen eingehen, die durch direkte Messung bestimmt werden müssen. Die Beobachtungen lieferten nun gerade in den strahlungsdurchlässigen Medien wie Schnee und Wasser gewisse besondere Merkmale, die durch die klassische Theorie keine Erklärung fanden. So zeigte sich, dass während des Einstrahlungsprozesses im Schnee das

Maximum der Temperatur nicht an der Oberfläche sondern einige cm tiefer auftritt (KERÄNEN 1929) und im Wasser wurde das Phänomen der sogenannten Sprungschicht entdeckt. Während bereits KERÄNEN vermutete, dass die Tiefenverlagerung des Temperaturmaximums bei Schnee eine Folge seiner Strahlungsdurchlässigkeit sei, glaubte man bei Wasser eine Erklärung für die Sprungschicht durch die von der Oberfläche zur Tiefe hin rasch abnehmende turbulente Durchmischung geben zu können. (MUNK 1948). Will man eine Theorie des Wärmehaushaltes strahlungsdurchlässiger Medien aufstellen, so ist es zweckmässig zunächst von einfachen Verhältnissen auszugehen. Solche relativ einfache Bedingungen liegen bei Schnee vor. Schnee kann in erster Näherung als für die Sonnenstrahlung nicht selektiv absorbierendes Medium angesehen werden, so dass man also in diesem Fall mit einem einheitlichen (endlichen) Absorptionskoeffizienten für die Einstrahlung rechnen kann. Andererseits ist Schnee, wie auch Wasser und Eis für die langwellige Gegenstrahlung der Atmosphäre praktisch undurchlässig, das heisst diese Medien können für die in der Natur vorkommende Temperaturstrahlung als nahezu schwarzer Körper betrachtet werden. Diese Tatsache, dass für die in der Natur vorkommenden Temperaturen Schnee, Eis und Wasser für den Einstrahlungsvorgang soweit es sich dabei um die Sonnen- und Himmelsstrahlung handelt durchlässig, jedoch für die ausgesandte Strahlung undurchlässig sind, ist das wesentliche Merkmal der ganzen Theorie. Ich habe an anderer Stelle (REUTER 1948 a) mit Hilfe dieses Ansatzes eine Theorie des Wärmehaushaltes von Schnee entwickelt, die eine Reihe von beobachteten Merkmalen der Temperaturverteilung zu erklären gestattet. In der folgenden Untersuchung soll nun ein Ansatz für eine allgemeine Theorie selektiv strahlungsdurchlässiger Medien durchgeführt werden mit besonderer Anwendung dieser Theorie auf die Verhältnisse in Eis, das ein selektiv absorbierendes Medium ähnlich dem Wasser darstellt, bei dem aber die Komplizierung durch die turbulente Durchmischung wegfällt. Immerhin lassen sich aber die so für Eis abgeleiteten Ergebnisse auch in erster Näherung auf ruhiges Wasser anwenden. Da Temperaturbeobachtungen in Eis m. W. keine

vorliegen, so kam es mir vor allem darauf an, die durch die Theorie aufgezeigten Unterschiede im Erwärmungsprozess verschiedener Medien (Boden, Schnee, Eis) herauszuarbeiten, so dass die gewonnenen Ergebnisse zunächst mehr qualitativ zu werten sind.

Erwärmung eines selektiv strahlungsdurchlässigen Mediums durch konstante kurzwellige Einstrahlung bei gleichzeitiger konstanter effektiver Ausstrahlung

Für unsere theoretischen Überlegungen setzen wir im nachfolgenden voraus: Eine gewisse Zeit t lang sei eine konstante Sonneneinstrahlung wirksam. Für die langwellige Eigenstrahlung der Atmosphäre möge das bestrahlte Medium praktisch undurchlässig sein. Ebenso weise das Medium in demjenigen Wellenlängenbereich, der der ausgesandten langwelligen Temperaturstrahlung vornehmlich zukommt, eine unendlich grosse Absorption auf. Dann kann die »effektive« Strahlungstemperatur des Mediums gleich der Oberflächentemperatur gesetzt werden und die tatsächlich wirksame Ausstrahlung der Oberfläche nach Abzug der langwelligen Gegenstrahlung der Atmosphäre in Form der sogenannten »effektiven« Ausstrahlung R angesetzt werden. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass diese Grösse R einen nahezu konstanten Betrag in dem betreffenden Zeitraum aufweist, wodurch die Rechnung eine wesentliche Verkürzung erfährt. Über die Berechtigung einer solchen Voraussetzung will ich hier nicht weiter diskutieren, da ich dies bereits in der erwähnten Arbeit getan habe. Jedenfalls ist durch Messungen belegt, dass die effektive Ausstrahlung in kürzeren Zeiträumen nur geringe Schwankungen zeigt (siehe dazu REUTER 1947 u. 1948 a, HANN-SÜRING 1937 mit den dort vorhandenen Literaturhinweisen). Die nachfolgenden Überlegungen behalten ihre Gültigkeit, wenn wir unter R nicht allein die effektive Ausstrahlung sondern den gesamten Wärmeverlust der Oberfläche durch Strahlung, Wärmeleitung, Austausch zur Luft hin und Verdunstung verstehen, sofern nur die Konstanz dieses Betrages gewährleistet ist. Durch Miteinbeziehung dieser Wärmeprozesse in die Oberflächenbilanz würde aber nur eine angenäherte Berücksichtigung dieser wesentlich vom Temperaturgradienten Erde-

Luft abhängigen Wärmetransporte stattfinden, so dass wir davon absehen wollen. Dies ist umso mehr berechtigt, als wir unsere Wärmehaushaltsbetrachtungen in Eis und Schnee bei tiefen Temperaturen durchführen, wo die Verdunstung praktisch vernachlässigbar ist und wir nur als weitere Einschränkung ruhende Luft über dem Medium voraussetzen müssen. Wie eine exakte Behandlung derartiger Probleme bei Mitberücksichtigung des Austausches in der Luft durchgeführt werden muss, habe ich an anderer Stelle für den nächtlichen Abkühlungsprozess gezeigt (REUTER 1947).

Für die Rechnung zerlegen wir die einstrahlende kurzwellige Sonnenstrahlung in $n + 1$ Spektralbereiche, die hinreichend klein gewählt seien, so dass innerhalb eines jeden Bereiches mit einem einheitlichen Absorptionskoeffizienten gerechnet werden kann. Mithin erhalten wir für die die horizontale Oberfläche erreichende Strahlung I :

$$I = i_0 + i_1 + \dots + i_n = \sum_0^n i_\lambda \quad (1)$$

Um allgemein zu bleiben, lassen wir die Möglichkeit einer selektiven Reflexion an der Oberfläche zu und bezeichnen die Reflexzahlen mit $\alpha_0, \alpha_1 \dots \alpha_n$. Setzen wir entsprechend $1 - \alpha_\lambda = \beta_\lambda$, und sind die den einzelnen Spektralbereichen zukommenden Absorptionskoeffizienten $a_0, a_1 \dots a_n$, so wird im Niveau z (positiv von der Oberfläche zur Tiefe hin gerechnet) in der Zeiteinheit eine durch die eindringende Strahlung hervorgerufene Temperaturänderung von:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{\rho c} \sum_0^n a_\lambda \beta_\lambda i_\lambda e^{-a_\lambda z} \quad (2)$$

stattfinden, wenn ρ und c die Dichte bzw. die spezifische Wärme des Mediums darstellen und T die Temperatur bedeutet.

Zusammen mit der (eindimensionalen) Wärmeleitungsgleichung ergibt dies, wenn

wir unter $K = \frac{k}{\rho c}$ die Temperaturleitfähigkeit

(k = Wärmeleitfähigkeit) verstehen folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{1}{\rho c} \sum_0^n a_\lambda \beta_\lambda i_\lambda e^{-a_\lambda z} \quad (3)$$

wobei wir als Nebenbedingungen gemäss den früheren Ausführungen:

$$t = 0, z > 0; T = T_a$$

$$t > 0, z = 0; k \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=0} = R = \text{const} \quad (3a)$$

setzen, mithin eine Isothermie vom Betrage T_a als Anfangszustand annehmen.

Zur Lösung von (3) mit (3 a) zerlegen wir die Differentialgleichung entsprechend den $n + 1$ Spektralbereichen in $n + 1$ Teilgleichungen, was infolge der Linearität möglich ist und erhalten für die erste derartige Gleichung:

$$\frac{\partial T_0}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T_0}{\partial z^2} + \frac{a_0 \beta_0 i_0}{\rho c} e^{-a_0 z} \quad (4)$$

mit den Nebenbedingungen:

$$t = 0, z > 0; T_0 = T_a$$

$$t > 0, z = 0; k \left(\frac{\partial T_0}{\partial z} \right)_{z=0} = R = \text{const} \quad (4a)$$

während für die übrigen n Gleichungen:

$$\frac{\partial T_\lambda}{\partial t} = K \frac{\partial^2 T_\lambda}{\partial z^2} + \frac{a_\lambda \beta_\lambda i_\lambda}{\rho c} e^{-a_\lambda z} \quad (5)$$

$$\lambda = 1, 2, \dots, n$$

mit den Nebenbedingungen:

$$t = 0, z > 0; T_\lambda = 0$$

$$t > 0, z = 0; \left(\frac{\partial T_\lambda}{\partial z} \right)_{z=0} = 0 \quad (5a)$$

gesetzt werden muss.

Die Lösung von (4) mit (4 a) erfolgt (siehe REUTER 1948 a) durch den Ansatz:

$$T_0 = \gamma - q e^{-a_0 z} \text{ mit } q = \frac{\beta_0 i_0}{k a_0}, \quad (6)$$

so dass dann in der Variablen γ folgende Differentialgleichung resultiert:

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \gamma}{\partial z^2} \quad (7)$$

mit

$$t = 0, z > 0; \gamma = q e^{-a_0 z}$$

$$t > 0, z = 0; \left(\frac{\partial \gamma}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{R - \beta_0 i_0}{k} \quad (7a)$$

Wie hier nicht näher ausgeführt werden soll, lässt sich die endgültige Lösung von (4) mit (4 a) schliesslich in der Form:

$$\Delta T_0 = T_0 - T_a = \frac{\beta_0 i_0}{k a_0} F(a_0, z, t) + (\beta_0 i_0 - R) G(z, t) \quad (8)$$

darstellen. Hierin

$${}_2 F(a_0, z, t) =$$

$$= \left\{ e^{K a_0^2 t - a_0 z} \left[1 - \Theta \left(a_0 \sqrt{Kt} - \frac{z}{2\sqrt{Kt}} \right) \right] + \right.$$

$$\left. + e^{K a_0^2 t + a_0 z} \left[1 - \Theta \left(a_0 \sqrt{Kt} + \frac{z}{2\sqrt{Kt}} \right) \right] - e^{-a_0 z} \right\} \quad (9)$$

und

$$G(z, t) = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi k \varrho c}} e^{-\frac{z^2}{4Kt}} - \frac{z}{k} \left[1 - \Theta \left(\frac{z}{2\sqrt{Kt}} \right) \right] \quad (10)$$

wenn wir unter

$$\Theta(x) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\zeta^2} d\zeta \quad (11)$$

das bekannte Gaussche Fehlerintegral verstehen.

Dass (8) mit (9) und (10) tatsächlich die gesuchte Lösung von (4) mit allen notwendigen Nebenbedingungen (4 a) ist, kann nachträglich leicht durch differenzieren bewiesen werden. Für (5) mit (5 a) ergibt sich analog die Lösung, wenn wir in (8) $R = 0$ setzen, zu:

$$\Delta T_\lambda = \frac{\beta_\lambda i_\lambda}{k a_\lambda} F(a_\lambda, z, t) + \beta_\lambda i_\lambda G(z, t), \quad (12)$$

so dass endlich die Gesamtlösung von (3) mit (3 a) unter Berücksichtigung von (1) in der Form:

$$\Delta T = \frac{1}{k} \sum_0^n \frac{\beta_\lambda i_\lambda}{a_\lambda} F(a_\lambda, z, t) + (\beta I - R) G(z, t) \quad (13)$$

beschrieben werden kann, wenn hier $1 - \beta$ die Reflexzahl für die Gesamtintensität I bedeutet. Für $a_\lambda \rightarrow \infty$ verschwindet der erste Term in (13). Er stellt mithin den Anteil der Temperaturänderung dar, der durch die Strahlungsdurchlässigkeit des Mediums hervorgerufen wird. In einem strahlungsundurchlässigen Medium z. B. im Erdboden tritt nur der zweite Term in Erscheinung.

Näherung der Funktion $F(a_\lambda, z, t)$ für Sonderfälle

Ist der Ausdruck $a_\lambda \sqrt{Kt}$ nach hinreichend langer Zeit genügend gross, was vor allem vom Absorptionskoeffizienten a_λ abhängen wird, können auch die beiden Ausdrücke

$$a_\lambda \sqrt{Kt} - \frac{z}{2\sqrt{Kt}} \text{ bzw. } a_\lambda \sqrt{Kt} + \frac{z}{2\sqrt{Kt}} \text{ als so}$$

gross vorausgesetzt werden, dass eine Näherung des Fehlerintegrals mit Hilfe einer Reihenentwicklung möglich ist. In der bereits mehrfach erwähnten Arbeit ist dies für den Fall eines einheitlichen Absorptionskoeffizienten durchgeführt worden, so dass wir uns hier nur darauf beschränken, die Verallgemeinerung auf eine selektive Absorption durchzuführen. Unter der Annahme, dass bereits das erste Glied der Reihenentwicklung des Fehlerintegrals eine hinreichende Näherung darstellt, wird (siehe RIEMANN-WEBER 1901 Bd. I. § 26):

$$F(a_\lambda, z, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4Kt}} \cdot \frac{1}{a_\lambda \sqrt{Kt}} - e^{-a_\lambda^2 z} \quad (14)$$

Lassen wir die Zeit noch weiter ansteigen, so wird in (14) auch der erste Term gegenüber dem zweiten vernachlässigbar und wir erhalten:

$$F(a_\lambda, z, t) = -e^{-a_\lambda^2 z} \quad (14a)$$

Diese Form der Funktion $F(a_\lambda, z, t)$ kann verwendet werden, um die Bedingungsgleichung für diejenige Tiefe z_0 aufzustellen, in der nach hinreichend langer Zeit (stationärer Zustand) das Temperaturmaximum auftritt.

Man hat dazu nur in (13) die vereinfachte Form (14 a) einzusetzen und nach z zu differenzieren. Das so erhaltene Resultat gleich Null gesetzt, ergibt die gesuchte Bedingungsgleichung. Wie man nach leichten Umformungen unter Berücksichtigung der zu (14 a) führenden Vereinfachungen bzw. Vernachlässigungen berechnet, lautet diese Bedingungsgleichung:

$$\sum_0^n \beta_\lambda i_\lambda e^{-a_\lambda z_0} = \beta I - R = B \quad (15)$$

wenn wir zur Abkürzung mit B die Strahlungsbilanz der Oberfläche bezeichnen.

Für den Betrag des Temperaturmaximums, das heisst für den Temperaturunterschied zwischen Oberfläche und der Tiefe z_0 , ergibt sich durch Einsetzen von (15) in (13):

$$T(z_0) - T(0) = \frac{1}{k} \left[\sum_0^n \frac{\beta_\lambda i_\lambda}{a_\lambda} - \sum_0^n \frac{\beta_\lambda i_\lambda}{a_\lambda} e^{-a_\lambda z_0} \right] - \frac{z_0 B}{k} \quad (16)$$

Für den Sonderfall $a_0 = a_1 = a_2 = \dots a_n = a$ ergibt sich aus (15) und (16) das Resultat für ein nicht selektiv absorbierendes Medium, nämlich:

$$\beta I e^{-a z_0} = B \text{ oder } z_0 = \frac{1}{a} \ln \frac{\beta I}{B} \quad (15a)$$

und

$$T(z_0) - T(0) = \frac{1}{ka} \left[R - B \cdot \ln \frac{\beta I}{B} \right] \quad (16a)$$

Dieser Fall findet bei Schnee Anwendung und wurde von mir in der bereits erwähnten Arbeit eingehend diskutiert. Eine Anwendung der allgemeinen Formeln (15) und (16) auf ein spezielles Problem, nämlich den Wärmehaushalt der menschlichen Haut, wurde von mir an anderer Stelle (REUTER 1948 b) gegeben.

Eine andere Näherung für die Funktion $F(a_\lambda, z, t)$ ist möglich, wenn der Absorptionskoeffizient a_λ sehr klein ist und gleichzeitig der Ausdruck $\sqrt{Kt}$ nicht zu gross wird. Zum Unterschied von der ersten

Näherung werden also hier Erwärmungsprozesse von relativ kurzer Zeitdauer in Betracht kommen bei grosser Strahlungsdurchlässigkeit des Mediums. Für hinreichend grosse Werte von z nämlich nimmt die Funktion $\Theta\left(a_\lambda \sqrt{Kt} - \frac{z}{2\sqrt{Kt}}\right)$ genügend genau den Wert minus eins an, während gleichzeitig die Funktion $\Theta\left(a_\lambda \sqrt{Kt} + \frac{z}{2\sqrt{Kt}}\right)$ dem Betrag von plus eins sehr nahe kommen wird. Berücksichtigen wir dies in (9), so erhalten wir:

$$F(a_\lambda, z, t) = e^{-a_\lambda z} (e^{K a_\lambda^2 t} - 1) \quad (17)$$

Da unter der Annahme $a_\lambda \ll 1$ für die e -Potenz in der Klammer $1 + K a_\lambda^2 t$ geschrieben werden kann, ergibt sich als weitere Vereinfachung:

$$F(a_\lambda, z, t) = a_\lambda^2 K t \cdot e^{-a_\lambda z} \quad (17a)$$

Diese Näherung findet Anwendung, wenn wir bei grosser Strahlungsdurchlässigkeit, also etwa bei Eis und Wasser im kurzwelligen Teil des Spektrums, nach nicht zu langer Zeit die Temperaturänderung (Erwärmung) in grösserer Tiefe berechnen wollen. Nach (13) ergibt sich nämlich in diesem Fall, da die Funktion $G(z, t)$ für genügend grosse Werte von z gegen Null geht, unter Verwendung von (17 a):

$$\Delta T = \sum_0^n \frac{\beta_\lambda i_\lambda a_\lambda}{\rho c} \cdot t \cdot e^{-a_\lambda z} \quad (18)$$

also bei vorgegebener Einstrahlung eine mit der Zeit direkt proportionale jedoch von der Ausstrahlung der Oberfläche unabhängige Temperaturerhöhung.

Anwendung der theoretischen Ergebnisse

Wir wollen nun die im Vorstehenden abgeleiteten theoretischen Ergebnisse auf praktische in der Natur realisierte Vorgänge anwenden. Wir nehmen drei verschiedene Medien an und zwar:

1. Feuchter Sand: $a_0 = a_1 = \dots a_n = \infty$
Albedo: 10 %, $\sqrt{k\rho c} = 3,30 \cdot 10^{-2}$ im CGS-System, $k = 0,0032$ cal/cm sec grad (siehe HANN-SÜRING 1937)

2. Altschnee: $a_0 = a_1 = \dots a_n = a = 0,15 \text{ cm}^{-1}$

Albedo: 60 %, $\rho = 0,4 \text{ g cm}^{-3}$,

$k = 0,00109 \text{ cal/cm sec grad}$

$c = 0,505 \text{ cal/g grad}$

Wir nehmen Schnee grösserer Dichte, um wenigstens einigermaßen mit einer einheitlichen Wärmeleitung rechnen zu können (siehe REUTER 1948 a).

3. Eis: Als selektiv strahlungsdurchlässiges Medium handelt es sich hier, für die einzelnen Wellenlängenbereiche die entsprechenden Absorptionskonstanten festzulegen. Wir setzen voraus, dass bei Klareis dieselben Verhältnisse wie bei Wasser vorliegen (siehe dazu BODE 1909). In der Tabelle I sind die entsprechenden Werte nach EMDEN (1940) und ASCHKINASS (1895) zusammengestellt.

Albedo: keine. Dies erscheint begründet, wenn wir senkrechte Einstrahlung voraussetzen, was wir tun wollen. Überdies handelt es sich hier vor allem um einen relativen Vergleich zu den beiden anderen Medien, bei denen dann also die Albedowerte relativ zu Klareis (bei senkrechter Bestrahlung) zu verstehen wären. $\rho = 0,917 \text{ g cm}^{-3}$, $k = 0,0051 \text{ cal/cm sek grad}$ $c = 0,505 \text{ cal/g grad}$.

Für alle drei Fälle setzen wir voraus, dass durch drei Stunden eine Gesamteinstrahlung gemäss Tabelle I von $I = 0,79 \text{ cal/cm}^2 \text{ Min}$ wirksam sei, während gleichzeitig der Verlust der Oberfläche durch effektive Ausstrahlung $R = 0,10 \text{ cal/cm}^2 \text{ Min}$ betrage. Als Anfangszustand ist in allen drei Fällen dieselbe Isothermie angenommen.

Das Ergebnis ist in den Abbildungen 1 bis 3 veranschaulicht. Wie wir in den theoretischen Betrachtungen gesehen haben, gibt die Funktion $F(a_\lambda, z, t)$ in (13) den Anteil in der gesamten Temperaturänderung, der gerade durch die Strahlungsdurchlässigkeit des Mediums bedingt ist, wieder. Beim Erdboden ist die Funktion Null für alle Zeiten. Um nun in den Abbildungen die Bedeutung der Strahlungsdurchlässigkeit für den Wärmehaushalt besonders augenscheinlich zu machen, ist in Abb. 2 und 3 also für Schnee und Eis die Funktion $(\beta I - R)$. $G(z, t)$ strichliert nach (13) und (10) eingezeichnet. Diese Kurven stellen also diejenige Temperaturänderung dar,

Tabelle I

Absorptionskoeffizienten von Wasser (Eis) für verschiedene Wellenlängenbereiche mit den entsprechenden Strahlungsintensitäten an der Erdoberfläche bei Annahme einer Einstrahlung von $1 \text{ cal/cm}^2 \text{ Min}$ an der Grenze der Atmosphäre auf die horizontale Fläche (nach EMDEN).

$\Delta\lambda$ μ	a_λ cm^{-1}	j_λ cal/cm^2 Min	p_λ	i_λ cal/cm^2 Min
0,00—0,45	0,0002	0,120	0,530	0,0636
0,45—0,50	0,0002	0,087	0,674	0,0586
0,50—0,55	0,00025	0,079	0,719	0,0566
0,55—0,60	0,0006	0,073	0,746	0,0544
0,60—0,65	0,0021	0,065	0,781	0,0508
0,65—0,70	0,0036	0,056	0,820	0,0459
0,70—0,75	0,015	0,049	0,848	0,0415
0,75—0,80	0,023	0,044	0,860	0,0377
0,80—0,85	0,032	0,038	0,870	0,0331
0,85—0,90	0,052	0,033	0,888	0,0284
0,90—1,00	0,24	0,055	0,893	0,0491
1,00—1,15	0,28	0,062	0,906	0,0561
1,15—1,35	1,17	0,051	0,915	0,0540
1,35—1,85	23,0	0,091	0,902	0,0820
1,85—2,5	67,0	0,033	0,900	0,0297
2,5—3,5	10^3	0,057	0,900	0,0513
3,5— ∞	$5 \cdot 10^2$			
Summe		1,000		0,7928

$\Delta\lambda$ = Wellenlängenbereich, j_λ = Strahlungsintensität an der Grenze der Atmosphäre, p_λ = Transmissionskoeffizient der Atmosphäre, i_λ = Strahlungsintensität an der Erdoberfläche.

die ein Medium unter den gegebenen Bedingungen erfahren würde, das zwar dieselben Wärmeleitungs- und Strahlungseigenschaften wie Schnee bzw. Eis aufweist, für die Strahlung jedoch undurchlässig ist. Man kann an Hand der Abbildungen das Rechenergebnis in folgender Weise überprüfen: Wir bestimmen den Wärmehalt, der dem betreffenden Medium durch die Einstrahlung zugeführt wird. Dies geschieht derart, dass wir in Abb. 1 bis 3 den Flächeninhalt zwischen der Ordinate Null und der Tautochrone ausmessen und mit der (mittleren) Dichte und spezifischen Wärme multiplizieren. Verwenden wir in Abb. 2 und 3 die strichlierten Kurven, so erhalten wir auf diese Weise die drei Grössen W_1 , W_2 und W_3 . Bezeichnen wir die den drei Fällen entsprechenden Strahlungsbilanzen der Oberfläche bei Berücksichtigung der verschieden vorausgesetzten Albedo mit resp. B_1 , B_2 und B_3 , so muss

$$W_1 : W_2 : W_3 = B_1 : B_2 : B_3 \quad (19)$$

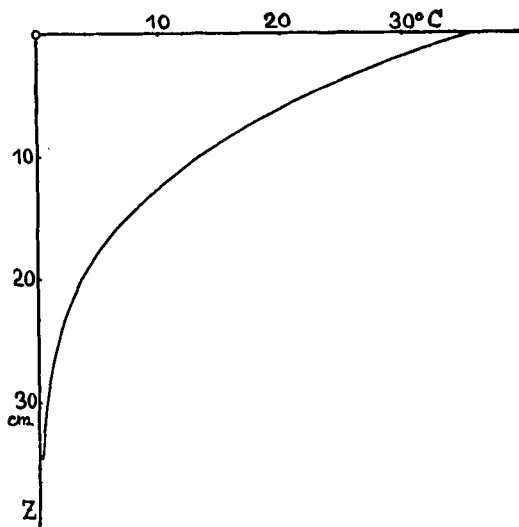


Abbildung 1. Erwärmung von Erdboden (feuchter Sand) als Funktion der Tiefe z nach einer dreistündigen Einstrahlung vom Betrage $I_0 = 0,79 \text{ cal/cm}^2 \text{ Min}$ bei gleichzeitiger effektiver Ausstrahlung von $R = 0,1 \text{ cal/cm}^2 \text{ Min}$ unter der Annahme einer Albedo von 10 %.

sein. Eine derartige Überprüfung liefert innerhalb der Fehlergrenzen der Planimetrierung tatsächlich die Beziehung (19). Mit einer ähnlichen Methode kann man aber auch die

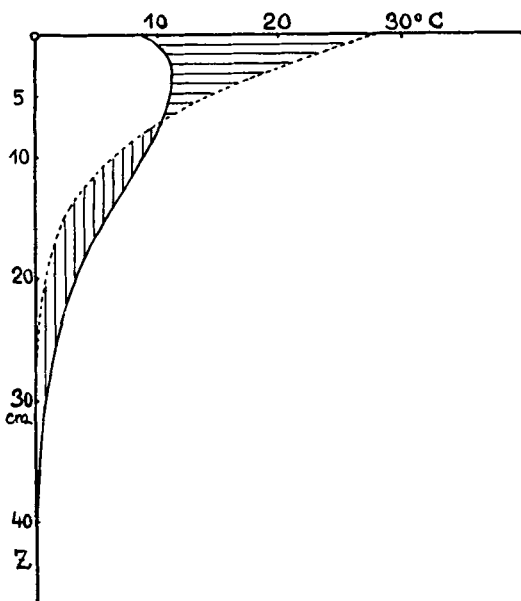


Abbildung 2. Erwärmung von Altschnee mit einer Dichte von $0,4 \text{ g/cm}^3$ und einer Albedo von 60 % unter denselben Bedingungen wie bei Abb. 1.

Wirkung der Strahlungsdurchlässigkeit im Fall 2 und 3, die dann zu den ausgezogenen Tautochronen in Abb. 2 und 3 führt, feststellen und die Theorie nachprüfen. So muss offenbar in Abb. 2 eine Flächengleichheit der schraffierten Flächen vorliegen, was augenscheinlich zeigt, wie durch die Strahlungsdurchlässigkeit eine Tiefenverlagerung des Wärmeinhaltes auftritt. Das lässt sich durch Planimetrierung leicht nachweisen. Dieselben Verhältnisse finden wir auch im Fall 3 vor, doch erscheint im ersten Moment hier die

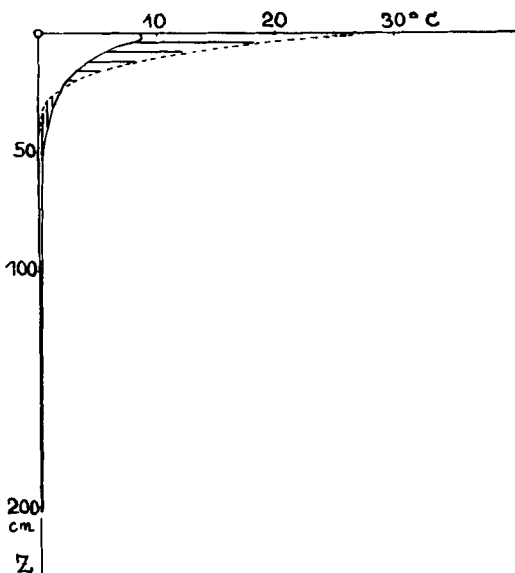


Abbildung 3. Erwärmung von Eis mit einer selektiven Absorption entsprechend den Werten der Tabelle I unter denselben Bedingungen wie in Abb. 1 und 2 ohne Albedo.

Theorie ein unrichtiges Ergebnis zu liefern. Es ist aber zu bedenken, dass bei Eis durch die ausserordentlich geringen Absorptionskoeffizienten im kurzwelligen Teil des Spektrums (siehe Tabelle I) ein beachtlicher Teilbetrag der Gesamtstrahlung bis in grosse Tiefen eindringt, ohne wesentlich geschwächt zu werden, und dort zu einer, wenn auch nur geringen, Erwärmung führt, die in dem Masstab der Abb. 3 nicht ersichtlich wird. Um diese Verhältnisse genauer studieren zu können, müssen wir auf die Näherungsformel (18) zurückgreifen. Danach berechnet sich für Eis noch in einer Tiefe von 10 Metern eine Erwärmung von $0,026$ Grad und in 15

Meter eine solche von 0,018 Grad. Infolge der grossen Vertikalausdehnung dieser an sich geringfügigen Erwärmung resultiert für den Gesamtwärmeinhalt dennoch ein fühlbarer Beitrag, der so viel ausmacht, dass die Planimetrierung analog dem Fall 2 die Gleichheit der entsprechenden Flächen liefert.

Um aber die Verhältnisse im Fall 3 klarer erkennen zu können, wollen wir das Problem noch von einer anderen Seite her betrachten. Wir fragen uns, in welcher Tiefe beim Eis dieselbe Erwärmung auftritt, die ein sonst

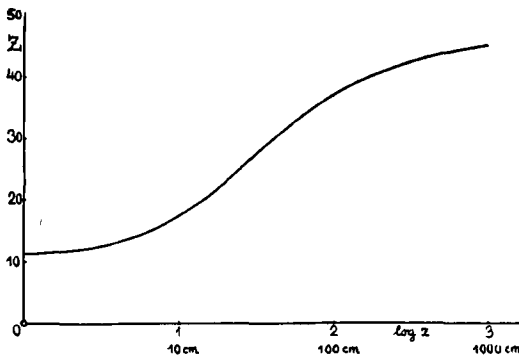


Abbildung 4. Kurve gleicher Erwärmung von strahlungsdurchlässigem und strahlungsundurchlässigem Eis unter denselben Bedingungen wie in Abb. 3.

gleichbeschaffenes aber »strahlungsundurchlässiges« Medium aufweisen würde. Das Ergebnis ist in Abbildung 4 dargestellt. Dabei wurde auf der Abszisse eine logarithmische Einteilung gewählt, um den Masstab zu verkleinern. Man erkennt aus dieser Abbildung sehr eindrucksvoll, welche Wirkung die Strahlungsdurchlässigkeit auf die Tiefenverlagerung der Erwärmung ausübt. Eine Erwärmung, die sonst in 45 cm Tiefe auftreten würde, findet sich in Wirklichkeit noch in 10 m.

Wir haben hier nur einen ganz speziellen Fall des Erwärmungsprozesses unter Annahme wesentlicher Vereinfachungen betrachtet und es drängen sich sofort eine ganze Reihe von Fragen über eine mögliche Erweiterung der obigen Theorie auf. So wäre zunächst der Fall einer periodischen Einstrahlung zu untersuchen, es wäre die Frage der Wärmeabgabe der Oberfläche des Mediums an die Luft durch Austauschvorgänge in die Theorie miteinzubeziehen, es wäre zu überlegen, inwieweit die Annahme einer veränderlichen effektiven Ausstrahlung auf das Ergebnis modifizierend

wirkt und dergl. mehr. Für den Fall einer nichtselektiven Absorption habe ich einige dieser Fragen bereits in der mehrfach erwähnten Arbeit (REUTER 1948 a) behandelt. Eine Verallgemeinerung auf ein Medium mit selektiver Absorption ist jedoch im allgemeinen keineswegs so leicht durchzuführen, wie dies hier möglich war, da die Formeln eine zu komplizierte Gestalt annehmen. Eine qualitative Abschätzung, die vor allem die Unterschiede der strahlungsdurchlässigen Medien gegenüber den strahlungsundurchlässigen aufzeigt, wird aber bereits durch die hier durchgeführte einfache Theorie gegeben.

Eine andere Erweiterung der durchgeführten Rechnungen, nämlich der Übergang zum Studium des Wärmehaushaltes flüssiger strahlungsdurchlässiger Medien, insbesondere dem Wärmehaushalt von Wasser, stösst auf gewisse Schwierigkeiten, da bei Wasser neben der molekularen Wärmeleitung noch diejenige durch Austausch und Konvektion eine überragende Rolle spielt. Beschränken wir uns allerdings auf absolut ruhiges Wasser und betrachten wir einen reinen Erwärmungsprozess im Sinne der oben angeführten Theorie, so dass eine Konvektion nicht in Frage kommt, dann können wir die Ergebnisse, die für Eis abgeleitet wurden, ohne weiteres auch auf Wasser anwenden. Die gegenüber Eis geänderte Dichte und spezifische Wärme führt zu keiner grundsätzlichen Änderung des Ergebnisses der Abb. 3. Insbesondere ist die Näherungsformel (18) auch für grosse Wassertiefen verwendbar. Allerdings muss beachtet werden, dass die Werte der Tabelle I für chemisch reines Wasser gelten und in der Natur nur sehr begrenzte Gültigkeit aufweisen, wie hier durch Hinweis auf SAUBERER und RUTTNER (1941) betont sei.

Abschliessend müssen wir aber auf eine besondere durch die hier durchgeführten Rechnungen und aus Abbildung 2 und 3 ersichtliche Erscheinung hinweisen, zumal diesbezüglich vielfach in der Literatur unrichtige Vorstellungen zu finden sind. Zunächst lassen die Abbildungen 2 und 3 das formelmässig in (15) und (16) bzw. (15 a) und (16 a) wiedergegebene Temperaturmaximum in einigen cm Tiefe erkennen, das nach dem eben gesagten ähnlich wie bei Eis auch bei Wasser in etwa 1 cm Tiefe zu finden wäre. Das heisst die Strahlungsdurchlässigkeit bewirkt knapp unter

der Oberfläche eine grössere Erwärmung als an der Oberfläche selbst. Wenn wir demgegenüber bei W. SCHMIDT (1925) lesen, dass die Temperaturerhöhung aus Absorption im reinen Wasser schon in ein Zentimeter Tiefe gegenüber der Erwärmung an der Oberfläche zu vernachlässigen ist und dass die von der Sonnenstrahlung hervorgerufene Temperaturwelle als von der Oberfläche ausgehend betrachtet werden kann, so finden wir hier einen Widerspruch mit der von uns abge-

leiteten Theorie. Ohne jedoch näher auf die Verhältnisse im Wasser, die einer eigenen Abhandlung vorbehalten bleiben sollen, einzugehen, sei nur abschliessend dazu betont, dass mithin auch die von W. SCHMIDT auf Grund seiner Vorstellung für Wasser abgeleiteten thermischen Austauschkoefizienten bei weitem zu gross sind, wenn wir, wie dies hier geschehen ist, die Strahlungsdurchlässigkeit als wesentlichen Faktor für die Erwärmung tieferer Schichten ansehen.

LITERATUR

- ASCHKINASS, E. 1895: Untersuchungen des Absorptionsspektrums von Wasser. *Wied. Ann.* **55**, S. 401.
- BODE, G. 1909: Verhalten des Eises im ultraroten Spektrum. *Ann. Phys.* **4** R Bd. 30.
- EMDEN, R. 1940: Zum Temperaturproblem der Seen. *Helv. Phys. Acta* **8**, Fasc. V, S. 396.
- HANN-SÜRING 1937: Lehrbuch der Meteorologie 5. Aufl. S. 104 ff. Leipzig.
- KERÄNEN, J. 1929: Wärme- und Temperaturverhältnisse der obersten Bodenschichten. Naturw. Monographien u. Lehrs. **8**, II. Teil, S. 169 ff, Berlin.
- MUNK, W. H. and ANDERSON, E. R. 1948: »Notes on a theory of thermocline. *J. Mar. Res.* **7** (3), S. 276.
- REUTER, H. 1947: Zur Theorie der nächtlichen Abkühlung der bodennahen Schicht und Ausbildung der Bodeninversion. *Sitz.Ber. Akad. Wiss. Wien*, Abt. II a 155.
- REUTER, H. 1948 a: Ueber die Theorie des Wärmehaushaltes einer Schneedecke. *Arch. Met. Geophys. u. Bioklim.* **A 1**, S. 62.
- 1948 b: Ueber die Tiefenverlagerung des Temperaturmaximums bei Bestrahlung der menschlichen Haut. *Wetter u. Leben Zeitschr. f. prakt. Bioklim.* **1**, H. 9.
- RIEMANN-WEBER 1901: Die partiellen Differentialgleichungen der Physik. Braunschweig 2. Aufl.
- SAUBERER-RUTTNER 1941: Die Strahlungsverhältnisse der Binnengewässer. *Probl. d. kosm. Physik*, Akad. Verl. Ges. Leipzig.
- SCHMIDT, W. 1925: Der Massenaustausch in freier Luft und verwandte Erscheinungen. *Probl. d. kosm. Physik*, Hamburg.